Série 12

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1

En sachant que les polynômes de Taylor d'ordre 4 de $\mathrm{Log}(1+x)$ et de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$ sont donnés respectivement par

$$P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \quad \text{et} \quad Q_4(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 \ ,$$

déduire les polynômes de Taylor d'ordre 4 de $\mathrm{Log}(1+x) + \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et de $\dfrac{\mathrm{Log}(1+x)}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$.

Solution. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 de $\mathrm{Log}(1+x) + \dfrac{1}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$ est donné par

$$\begin{aligned} P_4(x) + Q_4(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 \\ &= 1 - x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x^3 + \frac{19}{4}x^4 \end{aligned}$$

Pour obtenir le polynôme de Taylor d'ordre $m = 4$ de $\mathrm{Log}(1+x) \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2}$ au point $x_0 = 0$, on écrit le produit $P_m(x)Q_m(x)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{2m} c_k(x-x_0)^k$, mais on ne conserve que les termes pour lesquels la puissance k est plus petit au égal à m. Le polynôme de Taylor recherché est donc $\sum_{k=0}^{m} c_k(x-x_0)^k$. On trouve

$$\begin{aligned} P_4(x)Q_4(x) &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\cdot\left(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4\right) \\ &= x + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(3 + 1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(-4 - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\ &= x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{77}{12}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Le polynôme de Taylor recherché est donc $x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{77}{12}x^4$

Exercice 2*

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Solution. Au cours, on a vu

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon_1(x), \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} + x^{2l+1}\epsilon_2(x), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots + (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} + x^{2l}\epsilon_3(x), \\ \mathrm{Log}(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon_4(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \epsilon_j(x) = 0$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.

Il faut choisir l'ordre des développements limités tel qu'on puisse *éliminer* le dénominateur.

a) Comme

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon_5(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_5(x) = 0,$$

on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{120} - \epsilon_5(x)\right) = -\frac{1}{120}\,.$$

b) Comme

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = (1 + x + \frac{x^2}{2}) + x - (1 - \frac{x^2}{2}) - 2x + x^2\epsilon_6(x) = x^2 + x^2\epsilon_6(x)$$

et

$$x - \mathrm{Log}(1+x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_7(x)) = \frac{x^2}{2} - x^2\epsilon_7(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_6(x) = \lim_{x\to 0}\epsilon_7(x) = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \mathrm{Log}(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x^2\epsilon_6(x)}{\frac{x^2}{2} - x^2\epsilon_7(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \epsilon_6(x)}{\frac{1}{2} - \epsilon_7(x)} = 2.$$

c) Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de $\sin(\sin(x))$ et celui d'ordre 6 de $\sin(x)^2$.

Comme $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\epsilon_8(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_8(x) = 0$, il s'ensuit que

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin(x)^3}{3!} + \frac{\sin(x)^5}{5!} + \underbrace{\sin(x)^5\epsilon_8\Big(\sin(x)\Big)}_{:=x^5\epsilon_9(x)},$$

où $\lim_{x\to 0}\epsilon_9(x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\epsilon_8\Big(\sin(x)\Big)\sin(x)^5}{x^5} = 0$ car $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Pour les puissances de $\sin(x)$ on a :

$$\sin(x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon_8(x)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6\epsilon_{10}(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\epsilon_{11}(x),$$

$$\sin(x)^3 = \sin(x)^2\sin(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\epsilon_{11}(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon_8(x)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5\epsilon_{12}(x),$$

$$\sin(x)^5 = \sin(x)^2\sin(x)^3 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\epsilon_{11}(x)\right)\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5\epsilon_{12}(x)\right) = x^5 + x^5\epsilon_{13}(x),$$

et donc

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2}\right) + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon_{14}(x)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5\epsilon_{14}(x).\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + x^6\epsilon_{15}(x)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{18} + \epsilon_{15}(x)\right) = \frac{1}{18}\ ,\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon_j(x) = 0$ pour $j = 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

Exercice 3

A l'aide de combinaisons de polynômes de Taylor, trouver le développement limité d'ordre 4 autour de $a = 0$ de fonctions

a) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x))$ b) $f(x) = \exp(\sin(x))$

Solution. Pour $j \in \{1, \ldots, 8\}$, les fonctions ϵ_j ci-dessous satisfont $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon_j(t) = 0$ (tous les développements limités considérés sont autour de 0).

a) On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x)$ autour de $x = 0$. De plus la fonction $\mathrm{Log}(1+u)$ admet le développement limité suivant autour de $u = 0$:

$$\mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon_2(u).$$

Ici $u = \cos(x) - 1$ avec $u = 0$ lorsque $x = 0$.
On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\cos(x)) &= \mathrm{Log}(1 + (\cos(x) - 1))\\ &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + x^4\epsilon_3(x)\\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) - \frac{1}{8}x^4 + x^4\epsilon_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\epsilon_4(x).\end{aligned}$$

Notez bien que comme on demande le développement limité d'ordre 4, toutes les puissances supérieures vont dans le reste et ne doivent donc pas être calculées explicitement.

b) On utilise les développements limités d'ordre 4 autour de 0 de la fonction exponentielle et du sinus :

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + y^4\epsilon_5(y) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon_6(x).$$

En posant $y = \sin(x)$ et en obervant que $y = 0$ lorsque $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + x^4\epsilon_7(x)\\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\epsilon_8(x)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon_8(x).\end{aligned}$$

Exercice 4

On définit la fonction continue

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x} \quad \text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[.$$

a) Trouvez les zéros de f ;

b) Calculer les limites à gauche et à droite de f ;

c) Trouvez les extremas et les régions de monotonie de f ;

d) Trouvez les régions de convexité et de concavité de f ;

e) Trouvez les points d'inflexion de f ;

f) Esquissez le graphique de f.

Solution. On a que

a) On peut calculer que

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x} = 0\\ &\iff \sin(2x) = 0\\ &\iff x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.\end{aligned}$$

b) En utilisant le *théorème de Bernoulli-Hopital* on peut voir que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})+} f(x) &= \lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})+} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x}\\ &= \lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})+} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = -\infty\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}-} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x}\\ &= \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}-} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = +\infty.\end{aligned}$$

c) En sachant que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

et que

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

on peut calculer et simplifier la dérivé de f. Donc, on a que f' est donné par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cos(2x)(1+\sin x) - \sin 2x \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)(1+\sin x) - (2\sin x \cos x)\cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x - \sin^3 x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{2(1 - 2\sin^2 x - \sin^3 x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{2(1 - \sin x - \sin^2 x)}{1+\sin x}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ &\iff \sin x \in \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}. \end{aligned}$$

Mais on rejette la valeur $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ car elle est inférieure à -1. Donc on a que

$$x = \text{Arcsin}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ ou } x = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Donc f' est égal a zéro au points $\{\alpha, \pi - \alpha\}$ avec $\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Maintenant on étude le signe de f'. En fait on a que

- Sur $]-\frac{\pi}{2}, \alpha[$ on a $f' > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \alpha[$;
- Sur $]\alpha, \pi - \alpha[$ on a $f' < 0$ comme $f(\alpha) > f(\pi - \alpha)$ et donc f est strictement décroissante sur $]\alpha, \pi - \alpha[$;
- Sur $]\pi - \alpha, \frac{3\pi}{2}[$, on a $f' > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]\pi - \alpha, \frac{3\pi}{2}[$.

En plus on peut conclure que f a un maximum local strict en α et un minimum local strict en $\pi - \alpha$.

d) Étudions le signe de $f''(x)$ pour trouver ses régions de convexité et de concavité de f. Avec un peut du calcule on peut voir que

$$f''(x) = \frac{2(-\cos x - 2\sin x \cos x)(1+\sin x) - 2\cos x(1 - \sin x - \sin^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

Donc le signe de $f''(x)$ dépend seulement du signe du numérateur :

$$2\cos x(-(1+2\sin x)(1+\sin x) - 1 + \sin x + \sin^2 x) = 2\cos x(-2 - 2\sin x - \sin^2 x).$$

Comme

$$-2 - 2\sin x - \sin^2 x = -1 - (\sin x + 1)^2 < 0$$

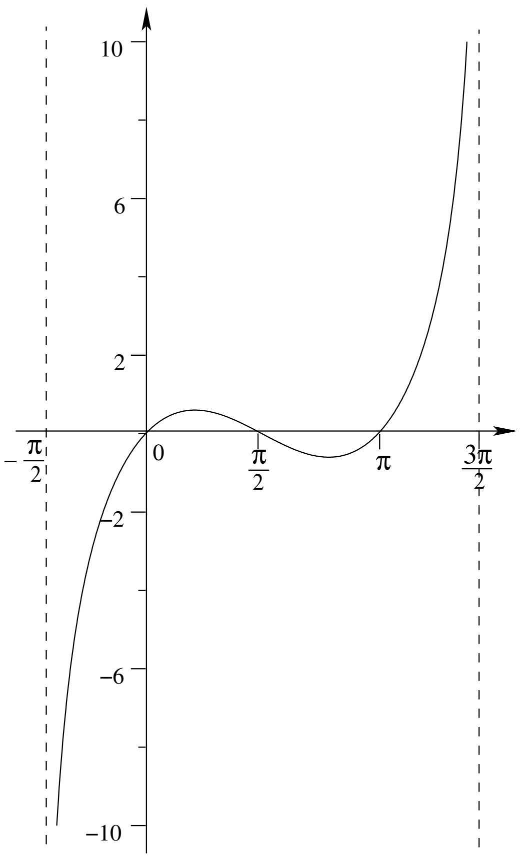
on a $f''(x) < 0$ si $\cos(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ si $\cos(x) < 0$. Donc on peut conclure que f est concave sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et convexe sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

f) On calcule les zéros de f''. On a que

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff \frac{2(-\cos x - 2\sin x \cos x)(1+\sin x) - 2\cos x(1 - \sin x - \sin^2 x)}{(1+\sin x)^2} = 0 \\ &\iff 2(-\cos x - 2\sin x\cos x)(1+\sin x) - 2\cos x(1 - - \sin^2 x) = 0 \\ &\iff 2\cos x(-2 - 2\sin x - \sin^2 x) = 0 \\ &\iff \cos x = 0 \text{ ou } -2 - 2\sin x - \sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

Mais comme $-2 - 2\sin x - \sin^2 x \neq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ on a que l'unique zéro de $f''(x)$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ c'est $\frac{\pi}{2}$. Comme $f''(x)$ change de signe en $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion de f et c'est le seul dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

f) Voici le graphique de f :



Exercice 5

Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x}\,.$$

Peut-on utiliser Bernoulli-l'Hospital dans ce cas ?

Solution. On écrit la limite comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x} = \lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)}$$

Puisque $\big|\cos\big(e^{1/x^2}\big)\big| \le 1$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\frac{\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1}{x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)} = \Big(\lim_{x\to 0} x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\cdot\Big(\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\Big) = 0\cdot 1 = 0.$$

La règle de Bernoulli-l'Hospital ne s'applique pas. En effet, en prenant

$$f(x) = \exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)-1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\,,$$

on a bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$ mais la dernière hypothèse n'est pas satisfaite, à savoir que la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}$ existe. En fait, la limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{d}{dx}\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\exp\Big(x^4\cos\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\Big(4x^3\cos\big(e^{1/x^2}\big) + 2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big)\Big)\right)\end{aligned}$$

n'existe pas parce que le terme $2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big)$ n'a pas de limite. En effet

$$\lim_{x\to 0} 2x\,e^{1/x^2}\sin\big(e^{1/x^2}\big) = \lim_{u\to\infty}\frac{2}{\sqrt{u}}\,e^u\sin(e^u)$$

et en prenant les suites $a_n = \mathrm{Log}(2n\pi)$ et $b_n = \mathrm{Log}\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ mais

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{a_n}}{\sqrt{a_n}}\sin(e^{a_n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n\pi}{\sqrt{\mathrm{Log}(2n\pi)}}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{b_n}}{\sqrt{b_n}}\sin(e^{b_n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}{\sqrt{\mathrm{Log}\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big)}}\underbrace{\sin\Big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\Big)}_{=1} = \infty$$

parce que $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u}{\mathrm{Log}(u)} = \infty$ (cette fois on *peut* utiliser Bernoulli-l'Hospital).

Conclusion : le fait que la règle de BH ne s'applique pas ne veut donc pas dire que la limite initiale n'existe pas !

Exercice 6

Soit $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer, seulement en utilisant le *Théorème des accroissements finis*, que

$$\text{si} \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = D\,, \quad \text{alors} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = D\,.$$

Solution. Supposons que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = D$. Fixons $\epsilon > 0$. On va montrer qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Big|\frac{f(x)}{x} - D\Big| \leq \epsilon\,, \text{ pour tout } x \geq N\,.$$

Commençons par prendre $N_0 > 0$ tel que

$$|f'(x) - D| \leq \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{pour tout } x \geq N_0\,.$$

Considérons un $x > N_0$ quelconque, et considérons f sur l'intervalle $[N_0, x]$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]N_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(N_0)}{x - N_0} = f'(c_x)\,.$$

Par notre choix de N_0,

$$D - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(N_0)}{x - N_0} \leq D + \epsilon\,.$$

Pour la suite, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x) - f(N_0)}{x} + \frac{f(N_0)}{x} \\ &= \frac{f(x) - f(N_0)}{x - N_0} \cdot \frac{x - N_0}{x} + \frac{f(N_0)}{x}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Avant de poursuivre, remarquons que le premier terme du membre de droite, $\frac{f(x)-f(N_0)}{x-N_0}$, est proche de D. Le deuxième, $\frac{x-N_0}{x}$, peut être rendu proche de 1 en prenant x suffisamment grand. Le troisième, $\frac{f(N_0)}{x}$, est petit lorsque x est grand.

Rendons cet argument rigoureux, en prenant $N > N_0$ tel que pour tout $x \geq N$,

$$\Big|\frac{x - N_0}{x} - 1\Big| \leq \frac{\epsilon}{3|D| + \epsilon}\,, \quad \text{et} \quad \Big|\frac{f(N_0)}{x}\Big| \leq \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Si $x \geq N$, on peut maintenant majorer (1) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(N_0)}{x - N_0} \cdot \frac{x - N_0}{x} + \frac{f(N_0)}{x} &\leq (D + \tfrac{\epsilon}{3})\big(1 + \frac{\epsilon}{3|D| + \epsilon}\big) + \tfrac{\epsilon}{3} \\ &= (D + \tfrac{\epsilon}{3}) + \underbrace{\frac{(D + \frac{\epsilon}{3})\epsilon}{3|D| + \epsilon}}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \tfrac{\epsilon}{3} \\ &\leq D + \epsilon\,, \end{aligned}$$

puis minorer :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(N_0)}{x - N_0} \cdot \frac{x - N_0}{x} + \frac{f(N_0)}{x} &\geq (D - \tfrac{\epsilon}{3})\big(1 - \frac{\epsilon}{3|D| + \epsilon}\big) - \tfrac{\epsilon}{3} \\ &= (D - \tfrac{\epsilon}{3}) - \underbrace{\frac{(D - \frac{\epsilon}{3})\epsilon}{3|D| + \epsilon}}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} - \tfrac{\epsilon}{3} \\ &\geq D - \epsilon\,. \end{aligned}$$