

Série 13

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Calculer les rayons de convergence des séries entières données ci-dessous et discuter leur comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Log } n}{n} x^n \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctg}(n)}{1+n^2} (x-2)^n$$

Exercice 2*

Écrire les séries de Taylor de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ aux points $x_0 = 0$ et $x_0 = 2$. Déterminer les intervalles de convergence de ces séries (étudier leur comportement aux bornes de l'intervalle de convergence).

Exercice 3

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{2}{3+4x}$ autour de x_0 et déterminer l'intervalle de convergence pour $x_0 = 0$ puis $x_0 = 2$.

Exercice 4

Trouver les trois premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) & \text{c) } f(x) = \text{Arctg}(x) \\ \text{b) } f(x) = \text{tg}(x) & \text{d) } f(x) = \sqrt{1+\text{tg}(x)} \end{array}$$

Exercice 5

Calculer la série de Mac-Laurin et son rayon de convergence, pour chacune des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f(x) = e^{-x} \qquad \text{b) } f(x) = \text{sh}(x) \qquad \text{c) } f(x) = \text{ch}(x)$$

Exercice 6

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ de

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \text{Log}(\cos(x)), & n = 4 \\ \text{b) } f(x) = \exp(\sin(x)), & n = 4 \\ \text{c) } f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}, & n = 3 \end{array}$$

Exercice 7

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $x_0 = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$