Série 13

(les exercices à rendre sont marqués avec *)

Exercice 1*

Calculer les rayons de convergence des séries entières données ci-dessous et discuter leur comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}\, x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(n)}{1+n^2}\,(x-2)^n$

Soution. Dans cet exercice, on considère des séries entières de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-a)^n,$$

c'est-à-dire, $a_0 = 0$.

a) Considérons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}\, x^n$ où $a_n = \dfrac{\operatorname{Log} n}{n}$ et $a = 0$.
Donc le rayon de convergence est

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\operatorname{Log} n}{n \operatorname{Log}(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(1+n)} = 1,$$

oú dans le dernière passage on utilise la *règle de Bernoulli-L'Hospital.* En fait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(1+n)} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} z}{\operatorname{Log}(1+z)} = \lim_{z\to+\infty} \frac{1/z}{1/(1+z)} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z+1}{z} = 1,$$

où $z \in]0,+\infty[$.
En $x = -1$ on a que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}\,(-1)^n$ converge par *le critère de convergence de Leibniz* appliqué à la série $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}\,(-1)^n$. Notez que la fonction $\frac{\operatorname{Log}(x)}{x}$ est décroissante sur $]e,+\infty[$ car sa dérivée, donnée par $\frac{1-\operatorname{Log} x}{x^2}$ est négative sur cet intervalle.
En $x = 1$ on a que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}$ diverge car $\dfrac{\operatorname{Log} n}{n} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$ dès que $n \geq 3$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
L'intervalle de convergence est donc $[-1,1[$.

b) Soit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ et $a = 2$.
Donc le rayon de convergence est

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3.$$

En $x = -1$ on a que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-3)^n}{3^{n+1}} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{2n}}{3} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{3} = +\infty$$

donc la série diverges.
En $x = 5$ on a que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3}$ diverge puisque la suite $\left(\frac{(-1)^n}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
Ainsi, l'intervalle de convergence est $]-1, 5[$.

c) Soit $a_n = \dfrac{\mathrm{Arctg}(n)}{1+n^2}$ et $a = 2$.
Donc le rayon de convergence est

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(n)}{1+n^2} \cdot \frac{1+(n+1)^2}{\mathrm{Arctg}(n+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(n+1)^2}{1+n^2} \cdot \frac{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arctg}(n)}{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arctg}(n+1)} \\ &= 1 \cdot \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

En $x = 1$ on a que la série converge (même absolument) car $\left|\dfrac{\mathrm{Arctg}\, n}{1+n^2}(-1)^n\right| = \dfrac{\mathrm{Arctg}\, n}{1+n^2} \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}$ converge.

En $x = 3$ on a que la série converge car $0 \leq \dfrac{\mathrm{Arctg}\, n}{1+n^2} \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}$ converge.

Ainsi, l'intervalle de convergence est $[1, 3]$.

Exercice 2*

Écrire les séries de Taylor de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ aux points $x_0 = 0$ et $x_0 = 2$. Déterminer les intervalles de convergence de ces séries (étudier leur comportement aux bornes de l'intervalle de convergence).

Solution. On a que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x}, \\
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\
f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3)}, \\
f'''(x) &= \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}, \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc

- $\underline{x_0 = 0}$, on a $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$, et la série de Taylor est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

De plus $r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| = 1$.

En $x = -1$ on a que la série diverge car $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^{2n} = \lim\limits_{N\to+\infty} (N+1) = +\infty$.

En $x = 1$ on a que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ diverge car la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. L'intervalle de convergence est donc $]-1, 1[$.

- $\underline{x_0 = 2}$, on a $f^{(n)}(2) = \dfrac{(-1)^n n!}{3^{n+1}}$, et la série de Taylor est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1} n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$.
Par l'exercice 1 point *b*), $r = 3$ avec divergence en $x = -1$ et en $x = 5$.
L'intervalle de convergence est donc $]-1, 5[$.

Exercice 3

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ autour de x_0 et déterminer l'intervalle de convergence pour $x_0 = 0$ puis $x_0 = 2$.

Solution. On sait que le développement de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ en série entière est $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, et que ce dernier converge pour tout $z \in]-1, 1[$.

1. On peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{3}x}.$$

Ainsi, en posant $z := -\frac{4}{3}x$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \qquad \text{pour } x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[.$$

2. De façon similaire, on peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{11}(x-2)}$$

de telle sorte qu'en posant $z := -\frac{4}{11}(x-2)$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{11} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{11}\right)^n (x-2)^n,$$

avec intervalle de convergence $\left]-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}\right[$ (obtenue à partir de $z = -\frac{4}{11}(x-2) \in \,]-1,1[$).

Remarque générale : On peut aussi calculer le rayon de convergence de ces séries en utilisant les formules vues au cours (si ces limites existent) :

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Exercice 4

Trouver les trois premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

b) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

c) $f(x) = \mathrm{Arctg}(x)$

d) $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}$

Solution.

a) Observons que $\mathrm{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \mathrm{Log}(1-x) - \mathrm{Log}(1+x)$. Ainsi on peut calculer la série complète de Mac-Laurin en additionnant terme par terme les séries de $\mathrm{Log}(1-x)$ et $\mathrm{Log}(1+x)$ (ceci est permis puisque les deux séries convergent pour $x \in \,]-1,1[$). On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\underbrace{-\frac{1}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{=\begin{cases} -\frac{2}{n},\ n \text{ impair} \\ 0,\ n \text{ pair}\end{cases}}\Bigg) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Remarque : Pour obtenir seulement les trois premiers termes de la série, on pourrait aussi utiliser les développements limités adéquats de $\mathrm{Log}(1-x)$ et $\mathrm{Log}(1+x)$.

b) <u>*Méthode 1*</u> : Utiliser l'égalité $\mathrm{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et les développements limités d'ordre 5 de

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

ainsi que celui d'ordre 2 de

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Comme $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)$, on obtient

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right)^2 + x^4\varepsilon(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

et ainsi

$$\operatorname{tg}(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\,.$$

Méthode 2 : Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de $f(x)=\operatorname{tg}(x)$ qui sont :

$$f'(x)=\frac{1}{\cos(x)^2},\qquad f''(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3},\qquad f'''(x)=\frac{2+4\sin(x)^2}{\cos(x)^4},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{8\sin(x)\left(2+\sin(x)^2\right)}{\cos(x)^5},\qquad f^{(5)}(x)=\frac{8\left(2+11\sin(x)^2+2\sin(x)^4\right)}{\cos(x)^6},$$

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=1,\qquad f''(0)=0,\qquad f'''(0)=2,\qquad f^{(4)}(0)=0,\qquad f^{(5)}(0)=16.$$

Ainsi

$$\operatorname{tg}(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+x^5\varepsilon(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x).$$

c) On calcule

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\qquad f'''(x)=\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}-\frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-48x^3}{(1+x^2)^4}+\frac{24x}{(1+x^2)^3},\qquad f^{(5)}(x)=\frac{384x^4}{(1+x^2)^5}-\frac{288x^2}{(1+x^2)^4}+\frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=1,\qquad f''(0)=0,\qquad f'''(0)=-2,\qquad f^{(4)}(0)=0,\qquad f^{(5)}(0)=24.$$

Ainsi

$$\operatorname{Arctg}(x)=\frac{1}{1!}x-\frac{2}{3!}x^3+\frac{24}{5!}x^5+x^5\varepsilon(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+x^5\varepsilon(x).$$

d) On utilise que pour $|x|<1$ on a $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\operatorname{tg}(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)$. Ainsi

$$\big(1+\operatorname{tg}(x)\big)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x)-\frac{1}{8}\operatorname{tg}(x)^2+\frac{1}{16}\operatorname{tg}(x)^3+\underbrace{\operatorname{tg}(x)^3\varepsilon\big(\operatorname{tg}(x)\big)}_{=x^3\varepsilon(x)},$$

où $\operatorname{tg}(x)^3\varepsilon\big(\operatorname{tg}(x)\big)=x^3\varepsilon(x)$ parce que $\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ est aussi borné autour de $x=0$. Comme

$$\operatorname{tg}(x)^2=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\right)^2=x^2+x^3\varepsilon(x)$$

et

$$\operatorname{tg}(x)^3=\left(x^2+x^3\varepsilon(x)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\right)=x^3+x^3\varepsilon(x)$$

on a finalement

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}=1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+x^3\varepsilon(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{11x^3}{48}+x^3\varepsilon(x)\,.$$

Exercice 5

Calculer la série de Mac-Laurin et son rayon de convergence, pour chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ c) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

Solution. En sachant que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

on peut calculer que

a)

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

b)

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\big(\underbrace{1-(-1)^n}_{=\begin{cases}0, & n \text{ pair}\\ 2, & n \text{ impair}\end{cases}}\big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c)

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\big(\underbrace{1+(-1)^n}_{=\begin{cases}0, & n \text{ impair}\\ 2, & n \text{ pair}\end{cases}}\big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exercice 6

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ de

a) $f(x) = \mathrm{Log}(\cos(x)), \quad n = 4$

b) $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$

Solution.

a) On a vu au cours que $f(u) = \mathrm{Log}(1+u)$ admet le développement limité suivant autour de $u = 0$:

$$\mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)\,.$$

Ici $1 + u = \cos(x)$, donc $u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$. On obtient donc

$$\mathrm{Log}(\cos(x)) = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)^2}_{=\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)} + x^4\varepsilon(x)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)\,.$$

Notez bien que comme on demande le développement limité d'ordre 4, toutes les puissances supérieures vont dans le reste $x^4\varepsilon(x)$ et ne doivent donc pas être calculées explicitement.

b) On utilise les développements limités d'ordre 3 autour de $a = 0$ de la fonction exponentielle et du sinus qui sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^4 + x^4\varepsilon(x) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)\,.
\end{aligned}$$

c) Les développements limités d'ordre 3 autour de $a = 0$ de $\sin(x)$ et $(1+y)^{1/2}$ sont

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + y^3\varepsilon(y)\,.$$

En posant $y = x - \frac{x^3}{6}$ on a donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^3 + x^3\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $x_0 = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}\,.$$

Solution. *Remarque préliminaire :* L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée (si vous le faites vous comprendrez pourquoi), mais d'utiliser des développements limités (DL) autour de 0 qui sont déjà connus.

Pour trouver le DL de $\cos(x)$ autour de $a = \frac{\pi}{3}$, on introduit la variable auxiliaire $y := x - \frac{\pi}{3}$. Ainsi on a

$$\cos(x) = \cos\Big(y + \frac{\pi}{3}\Big) = \cos(y)\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) - \sin(y)\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}\cos(y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(y)\,.$$

Comme $x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = 0$, on peut utiliser les DL de $\cos(y)$ et $\sin(y)$ autour de $y = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + y^4\varepsilon(y)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{y^3}{6} + y^4\varepsilon(y)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

On pose $u = \cos(x)$. Il faut alors trouver le DL de $(1+u)^{-1}$ autour de $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. En introduisant $v := u - \frac{1}{2}$, on peut récrire

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+v+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}+v} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}\,v}\,,$$

Pour le dernier terme, on utilise le DL $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$ autour de $x = 0$:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\,v\right) + \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^3 + \left(\tfrac{2}{3}\,v\right)^4 + v^4\varepsilon(v)\right). \qquad (2)$$

De (1) on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\,v = \frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,y - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,y^3 + \frac{1}{48}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)
\end{aligned}$$

qu'on met ensuite dans (2) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3}\Bigg[1 &- \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,y - \frac{1}{6}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\,y^3 + \frac{1}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\
&+ \left(\frac{1}{3}\,y^2 + \frac{1}{36}\,y^4 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) \\
&- \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 - \frac{1}{6}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + \left(\frac{1}{9}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right) + y^4\varepsilon(y)\Bigg]
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\cos(x)} &= \frac{2}{3}\Bigg[1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\,y + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)y^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)y^3 \\
&\qquad - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{36} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)y^4 + y^4\varepsilon(y)\Bigg] \\
&= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\,y^3 + \frac{13}{72}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\right] \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,y + \frac{1}{3}\,y^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,y^3 + \frac{13}{108}\,y^4 + y^4\varepsilon(y)\,.
\end{aligned}$$

En remplaçant finalement $y = x - \frac{\pi}{3}$ on obtient

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{13}{108}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\varepsilon(x)\,.$$