Exercice 1.
Avec les notations de la donnée, posons

$$a\colon G \to \mathrm{Bij}(X), \quad g \mapsto a(g)$$

où la fonction $a(g)$ est définie par

$$a(g)(x) = g \odot x, \quad \forall x \in X.$$

Il faut maintenant vérifier les points suivants:

1. L'application a prend ses valeurs dans le groupe $\mathrm{Bij}(X)$. Pour ceci, il suffit d'exhiber un inverse de $a(g)$, pour un $g \in G$ quelconque. On prétend que $a(g^{-1}) = a(g)^{-1}$. En effet, en utilisant les propriétés de $\odot$ indiquées dans la donnée :

$$(a(g) \circ a(g^{-1}))(x) = g \odot (g^{-1} \odot x) = (g.g^{-1}) \odot x = e_G \odot x = x$$

   et $a(g^{-1}) \circ a(g) = \mathrm{id}_X$ de la même manière.

2. $a(e_G) = \mathrm{id}_X$. Ceci résulte immédiatement de $e_G \odot x = x$ pour tout $x \in X$.

3. $a(g^{-1}) = a(g)^{-1}$, ce qui a été établi au premier point.

4. $a(gh) = a(g) \circ a(h)$, pour tous $g, h \in G$. En effet, en utilisant les propriétés de $\odot$:

$$a(gh)(x) = (gh) \odot x = g \odot (h \odot x) = (a(g) \circ a(h))(x).$$

Ainsi $a\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ est bien une action à gauche de G sur X.

Remarques :

1. Il y a deux définitions équivalentes d'une action à gauche d'un groupe G sur un ensemble X. La première est celle d'un morphisme de groupe $a\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$; la seconde est celle d'une application $\odot\colon G \times X \to X$ comme dans la donnée de l'exercice.
   Nous venons de montrer comment construire $a\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ étant donné $\odot$. Inversément, si l'on dispose d'un morphisme de groupes $a\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$, l'application

$$\odot\colon G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto a(g)(x)$$

   a les propriétés voulues.

2. Considérons une application $a\colon G \to \mathrm{Mor}(X)$, où $\mathrm{Mor}(X)$ est l'ensemble des fonctions $X \to X$ (pas nécessairement bijectives). Pour montrer que a est une action à gauche, il suffit d'établir que

$$a(e_G) = \mathrm{id}_X$$

et que

$$a(gh) = a(g) \circ a(h), \quad \forall g, h \in G.$$

(Autrement dit, les points 1 et 3 en-dessus sont superflus). En effet, en prenant $h = g^{-1}$ dans la seconde propriété, on obtient grâce à la première que

$$a(g^{-1}) = a(g)^{-1},$$

ce qui prouve au passage que $G \to \mathrm{Mor}(X)$ se factorise par $G \to \mathrm{Bij}(X)$.

Exercice 2. 1. Soit $a_l\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ une action à gauche de G sur X. On montre que l'application

$$a\colon G \to \mathrm{Bij}(X), \quad g \mapsto a(g) := a_l(g^{-1})$$

est une action à droite. On a immédiatement que

$$a(e_G) = a_l(e_G^{-1}) = a_l(e_G) = \mathrm{id}_X$$

et que

$$a(g^{-1}) = a_l(g) = a_l(g^{-1})^{-1} = a(g)^{-1}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} a(gh) &= a_l((gh)^{-1}) \\ &= a_l(h^{-1}g^{-1}) \quad \text{car } a_l \text{ est une action à gauche} \\ &= a_l(h^{-1}) \circ a_l(g^{-1}) = a(h) \circ a(g) \end{aligned}$$

et donc a est bien une action à droite.

2. Les raisonnements sont analogues.

Exercice 3.

Soit X un ensemble, $G \circlearrowright X$ une action à gauche d'une groupe G sur X. Notons $\mathcal{F}(X,k)$ l'ensemble des fonctions $X \to k$, où k est un corps. Pour $g \in G$, nous définissons une application $\cdot|_g\colon \mathcal{F}(X,k) \to \mathcal{F}(X,k)$ par

$$\varphi|_g(x) = \varphi(g.x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(X,k), \forall x \in X.$$

(Remarque à propos de la notation : nous écrivons $\varphi|_g$ pour $(\cdot|_g)(\varphi)$.)

1. Fixons $g \in G$. Nous allons montrer que $\cdot|_g \colon \mathcal{F}(X,k) \to \mathcal{F}(X,k)$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.
   En premier lieu, $\cdot|_g$ est une application linéaire. En effet, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(X,k)$, $\lambda \in k$ et $x \in X$ on a
   $$(\varphi + \psi)_g(x) = (\varphi + \psi)(g.x) = \varphi(g.x) + \psi(g.x) = \varphi|_g(x) + \varphi|_g(x)$$
   et
   $$(\lambda\varphi)|_g(x) = (\lambda\varphi)(g.x) = \lambda \cdot \varphi(g.x) = \lambda \cdot \varphi|_g(x).$$
   Comme $x \in X$ est quelconque, on en déduit
   $$(\varphi + \psi)|_g = \varphi|_g + \psi|_g, \quad (\lambda\varphi)|_g = \lambda \cdot \varphi|_g$$
   comme désiré.
   On prétend encore que $\cdot|_{g^{-1}} = (\cdot|_g)^{-1}$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{F}(X,k)$ et $x \in X$, on a
   $$(\varphi|_g)|_{g^{-1}}(x) = \varphi(g^{-1}.(g.x)) = \varphi((g^{-1}g).x) = \varphi(x)$$
   et un calcul identique montre que $(\varphi|_{g^{-1}})|_g(x) = \varphi(x)$. Comme φ et x sont quelconques, il s'ensuite que $\cdot|_{g^{-1}} = (\cdot|_g)^{-1}$.
   On a montré que $\cdot|_g$ est une application linéaire inversible. En d'autres termes, c'est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

2. On montre que l'application
   $$G \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{F}(X,k)), \quad g \mapsto \cdot|_g$$
   est une action à droite par automorphismes k-linéraires. Par le point précédent, on a bien $\cdot|_g \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{F}(X,k))$ pour tous $g \in G$, et
   $$(\cdot|_g)^{-1} = \cdot|_{g^{-1}}.$$
   On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\cdot|_{e_G} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X,k)}$. Il reste à monter que
   $$\cdot|_{gh} = (\cdot|_h) \circ (\cdot|_g).$$
   Prenons $\varphi \in \mathcal{F}(X,k)$ et $x \in X$ quelconques; il suffit de vérifier que
   $$\varphi|_{gh}(x) = (\varphi|_g)|_h(x).$$
   On a en effet :
   $$\begin{aligned} \varphi|_{gh}(x) &= \varphi((gh).x) \\ &= \varphi(g.(h.x)) \quad \text{car } G \circlearrowright X \text{ est une action à gauche} \\ &= \varphi|_g(h.x) \\ &= (\varphi|_g)|_h(x) \end{aligned}$$
   comme souhaité.

3. On prétend que

$$G \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{F}(X,k)), \quad g \mapsto \cdot|_{g^{-1}}$$

est une action à gauche. En vue du point précédent, s'agit d'un cas particulier du point 2 de l'exercice 2.

Exercice 4.
Soit G, H deux groupes, X un ensemble. Supposons donnés un morphisme de groupes $H \to G$ et une action à gauche $G \circlearrowleft X$. Cette action à gauche est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Bij}(X)$. La composition $H \to G \to \mathrm{Bij}(X)$ est encore un morphisme de groupes (puisque les deux flèches sont des morphismes de groupes), et correspond à une action à gauche $H \circlearrowleft X$.

Exercice 5.
Soit G un groupe. Etant donné un ensemble X et une action $G \to \mathrm{Bij}(X)$ (à gauche, respectivement à droite; la fonction $G \to \mathrm{Bij}(X)$ est alors un morphisme, respectivement un anti-morphisme de groupes), rappelons que :

- L'action est **fidèle** si la fonction $G \to \mathrm{Bij}(X)$ est injective;
- Plus généralement, le **noyau de l'action** de G sur X est le noyau de (l'anti-)morphisme $G \to \mathrm{Bij}(X)$. L'action est dite **triviale** si le noyau de l'action est G tout entier.

Dans la suite, on prendra $X = G$.

1. Considérons l'action $G \circlearrowleft G$ par translation à gauche, comme indiquée dans la donnée. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit d'une action à gauche. On prétend qu'elle est fidèle. Ceci revient à dire que si $g \in G$ agit trivialement sur G, alors $g = e_G$. C'est immédiat :

$$g.x = x \ \forall x \in G \Longrightarrow g.e_G = e_G \Longrightarrow g = e_G.$$

On prétend aussi que cette action est par morphismes de groupes si et seulement si G est le groupe trivial. En effet, étant donné $g \in G$, la bijection

$$G \to G, \quad x \mapsto g.x$$

est un morphisme de groupes seulement si e_G est envoyé sur e_G, ce qui revient à dire que $g = e_G$.

2. Dans le cas de la translation à droite, les raisonnements sont analogues.

3. On considère maintenant l'action de conjugaison de G sur G. On laisse une nouvelle fois au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit d'une action à gauche. Son noyau est constitué des éléments $g \in G$ vérifiant

$$gx = xg \quad \forall x \in G.$$

En d'autres termes, le noyau de l'action de conjugaison est le centre de G (l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres). On voit donc que l'action de conjugaison est triviale si et seulement tous les éléments commutent entre eux ; donc l'action de conjugaison est triviale si et seulement si G est abélien.
On prétend que l'action de conjugaison se fait par morphismes de groupes. En d'autres termes, étant donné $g \in G$, il faut vérifier que la fonction

$$G \to G, \quad x \mapsto g.x.g^{-1}$$

est un morphisme de groupes. Cela se vérifie par un simple calcul.

Exercice 6. 1. On prétend que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Il est clair que $\mathrm{Id}_{2\times 2} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, et puisque le déterminant de matrices est multiplicatif, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ est stable par multiplication et contient les inverses de ses éléments.

2. Il faut vérifier que $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$. On a

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + (ad\bar{z} + bcz)}{|cz+d|^2}$$

d'où

$$\mathrm{Im}(\gamma.z) = \underbrace{(-ad+bc)}_{=\det\gamma>0} \cdot \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{>0 \text{ car } z\in\mathbb{H}} > 0$$

3. Il est clair que $\mathrm{Id}_{2\times 2}$ agit trivialement sur $\mathbb{H}$. Un calcul direct donne que $(\gamma\gamma').z = \gamma.(\gamma'.z)$. Ceci montre que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ agit à gauche sur $\mathbb{H}$ (cf la seconde remarque à la fin de la correction de l'exercice 1).

4. Trouvons le noyau de l'action $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \circlearrowright \mathbb{H}$. Pour

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+,$$

l'action de γ est triviale si et seulement si

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad \forall z \in \mathbb{H}$$

ce qui est équivalent à

$$cz^2 + (d - a)z + b = 0 \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Cependant, un polynôme complexe à une variable de degré $n > 0$ a au plus n racines distinctes ; l'ensemble $\mathbb{H}$ étant infini, on en déduit que γ agit trivialement si et seulement si

$$c = b = 0, \quad d = a.$$

On a trouvé que le noyau de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \circlearrowright \mathbb{H}$ est constitué des matrices de la forme $\alpha \cdot \mathrm{Id}_{2\times 2}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), que l'on appelle *matrices scalaires*.