EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 12

Exercice 1. Exhiber des domaines fondamentaux (jolis) pour

1. L'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^{+}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. L'action de $(\mathbb{Z},+)$ sur $\mathbb{R}$ par translations.
4. L'action de $(\mathbb{Z}^2,+)$ sur $\mathbb{R}^2$ par translations.
5. L'action de $(\mathbb{Z}+j\mathbb{Z},+)$ sur $\mathbb{C}$ par translations ($j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
6. L'action du groupe de rotations lineaires de parametres complexes i^n, $n\in\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $\mathbf{P}_4$ un carre (centre en $\mathbf{0}$), P un sommet et $D_8=\langle r_4,s\rangle$ son groupe d'isometries (engendre par une rotation d'ordre 4 et une symetrie axiale).

— Pour les groupes $G=D_8$, $R=\langle r_4\rangle$, $S=\langle s\rangle$ verifier que le Theoreme orbite/quotient/stabilisateur est bien correct : calculer dans chaque cas, l' orbite de P, le stabilisateur de P et verifier l'equalite $|G.P|=|G/G_P|$.

Exercice 3. On pose

$$(\mathbb{R}^2)^2_1=\{(P,Q)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ d(P,Q)=1\}$$

l'ensemble des segments unitaires de $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des paires de points de $\mathbb{R}^2$ a distance (euclidienne) 1 l'un de l'autre.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action bien définie sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ agit transitivement sur $(\mathbb{R}^2)^2_1$.

Exercice 4. Soit $G \circlearrowright X$ un groupe agissant transitivement sur un ensemble. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :

1. Il existe $x\in X$ tel que le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X-\{x\}$.
2. Pour tout $x\in X$, le groupe G_x agit transitivement sur l'ensemble $X-\{x\}$.
3. Le groupe G agit transitivement sur X.

Retrouver ainsi une solution de l'exercice precedent.

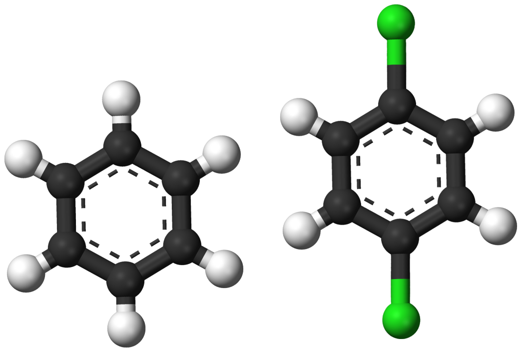

FIGURE 1 – Molecule de Benzene et de $1-4$-dichlorobenzene

Exercice 5. On souhaite généraliser les calculs du nombre $C(p,c)$ de colliers de p perles a c couleurs.

On note $\mathcal{F}(p,c)$ l'ensemble des coloriages de l'ensemble des sommets d'un polygone regulier de p elements avec c couleurs.

1. Enumerer (dans un tableau) les 8 elements φ de D_8 avec leur ordre et pour chaque φ, calculer le nombre de points fixes de φ agissant sur $\mathcal{F}(4,c)$ pour $c = 2, 3, 4$ (on pourra pour cela enumerer les differentes orbites du carre -non-colore- sous l'action sous-groupe $\varphi^{\mathbb{Z}}$ engendre par φ).
2. En deduire le nombre de modeles de colliers possibles pour $c = 2, 3, 4$.
3. Calculer le nombres d'orbites $|C_4 \backslash \mathcal{F}(p,c)|$ de $\mathcal{F}(p,c)$ quand on ne considere que l'action du sous-groupe C_4 des rotations su carre.

Exercice 6. Calculer $C(5,2)$ et $C(5,3)$ de la meme maniere. Remarquez vous un phenomene particulier ?

Exercice 7. Le benzene est une molecule formee de 6 atomes de carbone et 6 atomes d'hydrogene, chaque atome de carbone est lie a deux autres atomes de carbone, le tout se fermant en un hexagone regulier ; par ailleurs chaque atome d'hydrogene est lie a un atome de carbone.

Les chlorobenzenes, dichlorobenzenes, ..., hexachlorobenzenes sont les molecules formees en remplacant 1, 2, 3,...5 ou 6 atome(s) d'hydrogene par 1, 2, 3,...5 ou 6 atome(s) de Chlore.

Combien au total peut-on synthetiser de telles molecules ?