Série 14

Exercice 1

Calculer les primitives ci-dessous, à l'aide de primitives déjà connues.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\operatorname{Log} x}\,dx$

Solution.

a) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx &= \int\left(\frac{3x}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^2}\right)dx\\ &= \frac{3}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx + 4\int\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\operatorname{Log}\bigl(1+x^2\bigr)+4\operatorname{Arctg}(x)+C\,.\end{aligned}$$

b) On utilise que la fonction à intégrer est une dérivée en chaîne

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} = -f\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\varphi'(x) = -\Bigl(F\bigl(\varphi(x)\bigr)\Bigr)'\,,$$

avec $\varphi(x)=\cos(x)$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ et $F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}-C$ une primitive de F. Ainsi

$$\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx = -\left(-\frac{1}{2\cos(x)^2}-C\right) = \frac{1}{2\cos(x)^2}+C\,.$$

c) On remarque qu'il faut intégrer une composition avec une fonction affine, c.-à-d.

$$\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}x\bigr)^2}}\,.$$

Comme $\bigl(\operatorname{Arcsin}(x)\bigr)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la fonction $\operatorname{Arcsin}(x)+C$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C\,.$$

d) En utilisant la définition du sinus hyperbolique et une identité remarquable, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1-(e^{-x})^2}{1+e^{-x}}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(1+e^{-x})(1-e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\left(x+e^{-x}\right)+C\,.\end{aligned}$$

e) En faisant le changement de variable $y=\operatorname{Log} x$ et $dy=\frac{dx}{x}$ on trouve que

$$\int \frac{1}{x\operatorname{Log} x}dx = \int \frac{1}{y}dy = \operatorname{Log} y + C.$$

Donc une primitive est donnée par $\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)+C$

Exercice 2

Calculer les intégrales définies suivantes

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x})\,dx$

Solution.

a) En utilisant que $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$, on observe que

$$\sin(x)^5 = \left(1-\cos(x)^2\right)^2\sin(x) = -f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

avec $t=\varphi(x)=\cos(x)$ et $f(t)=(1-t^2)^2$. Comme les bornes de x sont $\alpha=0$ et $\beta=\frac{\pi}{2}$, les bornes de t sont $a=\varphi(\alpha)=1$ et $b=\varphi(\beta)=0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos(x)^2\right)^2\sin(x)\,dx &= -\int_1^0 (1-t^2)^2\,dt\\ &= \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt\\ &= \left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

b) On pose $x=\varphi(u)=u^2-1$, $\varphi'(u)=2u$. Comme x varie entre $a=2=\varphi(\sqrt{3})$ et

$b = 3 = \varphi(2)$, les bornes de u sont $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2-1}\, du \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)}\, du \\
&= 2\int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1}\, du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1}\, du \\
&= \left[2u + \mathrm{Log}\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\right]_{\sqrt{3}}^2 \\
&= 4 - 2\sqrt{3} + \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\right).
\end{aligned}$$

c) Le changement de variable à poser est $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = \frac{\pi^2}{16} = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $b = \frac{\pi^2}{9} = \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$, les bornes de u sont $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x})\, dx &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} u\cos(u)\, du \\
&\overset{(*)}{=} 2\Big[u\sin(u)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(u)\, du \\
&= 2\Big[u\sin(u) + \cos(u)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ ,
\end{aligned}$$

où on a intégré $(*)$ par parties avec $f'(u) = \cos(u)\,,\ g(u) = u$.

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\, dx$

Solution. Pour intégrer des fractions polynomiales le méthode des éléments simples est particulièrement adaptée.

a) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}\ , \qquad \text{avec} \qquad \alpha = -2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3.$$

Ainsi

$$\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\, dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right) dx = -2\,\mathrm{Log}\,|x| + 2\,\mathrm{Log}\,|x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

b) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha x+\beta}{1+x^2} + \frac{\gamma x+\delta}{(1+x^2)^2}\ , \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{-x}{(1+x^2)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

c) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1.$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = 2\operatorname{Log}(|x|) - \operatorname{Log}(|x-1|) - \frac{2}{x} + C.$$

d) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \operatorname{Log}\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right) + C.$$

Exercice 4

Calculer

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+t}}\,dt$ c) $\displaystyle\int \frac{3y^2-4}{y^3-4y+7}\,dy$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} y}\,dy$

Solution. Dans les solutions suivantes, C désigne une constante réelle quelconque.

a) Poser $t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$ (avec $t, u > 0$)

$$\begin{aligned}\int^{t=x} \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}dt &= \int^{u=\sqrt{x}} \frac{u}{u^2(1+u^2)}\,2u\,du \\ &= \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u^2}du \\ &= 2\operatorname{Arctg}\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

pour $x > 0$.

b) Poser $1+t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$ (avec $t > -1$ et $u > 0$)

$$\begin{aligned}\int^{t=x} \frac{1}{1+\sqrt{1+t}}dt &= \int^{u=\sqrt{1+x}} \frac{1}{1+u}\,2u\,du \\ &= \int^{\sqrt{1+x}} \frac{2(1+u)-2}{1+u}du \\ &= 2\sqrt{1+x} - 2\operatorname{Log}(1+\sqrt{1+x}) + C.\end{aligned}$$

c) On a que

$$\int^x \frac{3y^2-4}{y^3-4y+7}\,dy = \int^x \frac{1}{y^3-4y+7}(y^3-4y+7)'dy$$
$$= \operatorname{Log}|x^3-4x+7|+C.$$

d) On a que

$$\int^x \frac{1}{\operatorname{tg} y}\,dy = \int^x \frac{\cos y}{\sin y}\,dy$$
$$= \int^x \frac{1}{\sin y}(\sin y)'dy$$
$$= \operatorname{Log}|\sin x|+C.$$

Exercice 5

Etudier la convergence des intégrales suivantes. En cas de convergence, calculer l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \operatorname{Log}(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{1}^{5-} \frac{1}{5-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solution.

a) La fonction $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ n'est pas définie (entre autres) en $x = \dfrac{\pi}{2}$. On a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{4}}^{d} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \left(-\operatorname{Log}|\cos x|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{d}$$
$$= \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \left(-\operatorname{Log}(\cos x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{d}$$
$$= \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \left(-\operatorname{Log}(\cos d)+\operatorname{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right) = +\infty$$

car $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{y\to 0+}\operatorname{Log}(y) = -\infty$. Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ diverge.

b) Nous avons

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}}\,dx = \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{4}}^{d} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}}\,dx$$
$$= \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \left(-\frac{3}{2}(\cos x)^{2/3}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{d}\right)$$
$$= \lim_{d\to\frac{\pi}{2}-} \left(-\frac{3}{2}(\cos d)^{2/3}+\frac{3}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2/3}\right) = \frac{3}{2}(1/\sqrt{2})^{2/3}$$

car $(\cos\dfrac{\pi}{2})^{2/3} = 0$.

c) On rappelle que la fonction $\mathrm{Log}(x)$ n'est pas définie en $x = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 0+} \int_c^1 \mathrm{Log}(x)dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 (x)' \,\mathrm{Log}(x)dx \\
&\overset{p.p.}{=} \lim_{c\to 0+} \Big(x\,\mathrm{Log}(x)|_c^1 - \int_c^1 x(\mathrm{Log}\, x)' dx \Big) \\
&= \lim_{c\to 0+} \Big(-c\,\mathrm{Log}(c) - (1-c) \Big) \\
&= \lim_{c\to 0+} \frac{\mathrm{Log}(c)}{-c^{-1}} - 1 \\
&\overset{B.H.}{=} \lim_{c\to 0+} \frac{1/c}{c^{-2}} - 1 = -1.
\end{aligned}$$

d) La fonction $\frac{1}{(5-x)}$ n'est pas définie en $x = 5$. Voici l'argument dans ce cas

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to 5-} \int_1^d \frac{1}{5-x} dx &= \lim_{d\to 5-} (-\mathrm{Log}\,|5-x|)\Big|_1^d \\
&= \lim_{d\to 5-} (-\mathrm{Log}(5-x))\Big|_1^d \\
&= \lim_{d\to 5-} (-\mathrm{Log}(5-d) + \mathrm{Log}(4)) = +\infty.
\end{aligned}$$

e) La fonction $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en $x = 0$ et l'intervalle $]0, +\infty[$ n'est pas majoré. Par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$, on obtient

$$\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_{x=1}^{x=t} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int_{u=1}^{u=\sqrt{t}} e^{-u}\, du = -2\, e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}.$$

Alors, puisque la fonction $\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= -\lim_{c\to 0+} \int_1^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= -\lim_{c\to 0+} (-2e^{-\sqrt{c}} + 2e^{-1}) = 2 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{d\to +\infty} \int_1^d \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{d\to +\infty} \Big(-2\, e^{-\sqrt{d}} + 2e^{-1} \Big) = \frac{2}{e}.$

On en déduit que $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ converge et vaut 2.