Correction de la Série 12

Prof. Philippe Michel
MATH 120 - Géométrie I

December 24, 2018

Exercice 1

Proof. Pour trouver le domaine fondamental, nous devons d'abord écrire l'espace sous la forme d'une union disjointe d'orbites, puis sélectionner un point de chaque orbite. Dans chaque cas, il y aura une manière 'joli' de choisir ces points.

1. Commençons par étudier l'orbite de l'origine. On observe que,

$$T(\mathbb{R}^2) \cdot (0,0) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \cdot (0,0)$$

Mais clairement,

$$T(\mathbb{R}^2) \cdot (0,0) = \mathbb{R}^2$$

Par conséquent, il n'y a qu'une seule orbite. Le domaine fondamental peut être choisi comme n'importe quel point de $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathrm{Isom}_0^+(\mathbb{R}^2)$ est le groupe de rotations autour de l'origine. Par conséquent, l'orbite de tout point (x, y) est un cercle de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$ autour de l'origine. On peux écrire $\mathbb{R}^2$ comme une union disjointe d'orbites maintenant,

$$\mathbb{R}^2 = (0,0) \sqcup \bigsqcup_{r>0} C_r(0,0)$$

où $C_r(0,0)$ désigne le cercle de rayon r à l'origine.
Une façon géométrique de sélectionner un point parmi toutes ces orbites consiste à tracer un demi-droite partant de l'origine et à sélectionner le point (unique) correspondant à son intersection avec chaque orbite.

3. Nous commençons par étudier les orbites. Nous observons que l'orbite de tout point $p \in \mathbb{R}$ est donnée par l'ensemble,

$$\mathcal{O}_p = \{p + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Par conséquent, chaque orbite a un représentant unique dans l'intervalle $[0, 1)$ (donné par $p - \lfloor p \rfloor$). Inversement, aucun point sur $[0, 1)$ ne peut se trouver dans la même orbite. Par conséquent, $[0, 1)$ est un domaine fondamental pour l'action.

4. Nous utiliserons une stratégie similaire à celle utilisée lors de l'exercice précédent. Soit (a, b) n'importe quel point. Nous voyons que l'orbite de ce point sous l'action de $\mathbb{Z}^2$ est,

$$\mathcal{O}_{(a,b)} = \{(a, b) + (m, n) : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\} = \{(a + m, 0) + (0, b + n) : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Comme nous l'avons vu dans l'exercice précédent, nous trouvons un représentant de n'importe quelle orbite dans l'ensemble $[0, 1) \times [0, 1)$ (c'est-à-dire un carré moins une partie de sa limite). Et nous observons également qu'il n'y a pas deux points de cet ensemble dans la même orbite. Nous avons donc trouvé un domaine fondamental pour l'action donnée.

5. Nous rappelons que $\mathbb{C}$ est isomorphe $\mathbb{R}^2$ en tant qu'espaces vectoriels (via l'isomorphisme envoyant $a + ib$ à (a, b)). Nous allons abuser de la notation et utiliser j pour faire référence à son image via l'isomorphisme ci-dessus.
Notons d'abord que les vecteurs $e_0 = (1, 0)$ et j forment une base de $\mathbb{R}^2$. Soit p un point dans $\mathbb{R}^2$ du formulaire $ae_0 + bj$. Son orbite sous l'action de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ est donnée par,

$$\mathcal{O}_p = \{(a + m)e_0 + (b + n)j : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Maintenant, encore une fois, nous pouvons montrer que le domaine fondamental est l'ensemble,

$$F = \{ae_0 + bj : a, b \in [0, 1)\}$$

Géométriquement, le domaine est un parallélogramme à côtés donné par e_0 et j, moins une partie de sa limite.

6. Nous notons que l'ensemble $\{i^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ne contient que 4 éléments correspondant à des rotations de $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe quelconque. Son orbite est,

$$\{a + ib, -b + ia, -a - ib, b - ia\}$$

Tout élément sauf 0 a un représentant avec une partie réelle positive et une partie imaginaire strictement positive. Ainsi, l'un des domaines fondamentaux possibles est l'ensemble,

$$\{a + ib : a \geq 0, b > 0\} \sqcup (0, 0)$$

□

Exercice 2

Proof. Soit P n'importe quel côté. On voit ça,

$$|G.P| = 4$$

puisque l'action est transitive. On va aussi que les seules isométries préservant P sont l'identité et la symétrie autour de l'axe de symétrie de P. Donc, $|G_P = 2|$ et $|G/G_P| = 4 = |G.P|$. □

Exercice 3

Proof. 1. Nous commençons par noter une action de groupe de G sur X, induit une action de G sur $X \times X$ donnée par,

$$g \odot (x, y) = (g.x, g.y)$$

for all $(x, y) \in X \times X, g \in G$. Ceci correspond à l'inclusion diagonale de $\mathrm{Bij}(X)$ dans $\mathrm{Bij}(X \times X)$ (vérifier qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupe). Nous avons donc une action de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Il suffit de vrifier que pout tout $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$,

$$\phi((\mathbb{R}^2)^2_1) \subset (\mathbb{R}^2)^2_1$$

Mais cela est clair parce que ϕ est une isométrie.

2. Soit (P, Q) et (R, S) deux paires de points tels que $d(P, Q) = d(R, S) = 1$. Nous décrirons lisométrie qui mappe la paire ordonnée (P, Q) à (R, S). Nous envoyons d'abord P à R via un élément de $T(\mathbb{R}^2)$ puis faisons pivoter limage de Q vers S. $\square$

Exercice 4

Proof. Nous montrons 1) $\Rightarrow$ 2). Soit $x', y, y' \in X$ tel que $y, y' \in X \setminus \{x'\}$. Nous devons trouver un élément $g \in G_{x'}$ tel que $g(y) = y'$. Puisque G agissant transitivement, $\exists h \in G$ tel que $h(x') = x$. Let $h(y) = z$ et $h(y') = z'$. Notez que $z, z' \neq x$ parce que l'action nous donne une bijection.
En utilisant 1), on trouve $l \in G_x$ tel que $l(z) = z'$. On voit que l'élément $h^{-1} \cdot l \cdot h \in G$ est tel que $h^{-1} \cdot l \cdot h(x') = h^{-1}(x) = x'$ et $h^{-1} \cdot l \cdot h(y) = h^{-1}(z') = y'$. Donc, $h^{-1} \cdot l \cdot h \in G_{x'}$ et a la propriété requise.

Maintenant, nous montrons 2) $\Rightarrow$ 3). Soit $(x, x') \in X \times X$ et $(y, y') \in X \times X$ tel que $x \neq x'$ et $y \neq y'$. Si $y' \neq x$, on peux trouver un élément $g \in G_x$ tel que $g(x') = y'$. Et maintenant on trouve un élément $h \in G_{y'}$ tel que $h(x) = y$ (car $x, y \in X \setminus \{y'\}$).
Dans le cas où $x = y'$ si $x' \neq y$, on peux utiliser le même argument. Par conséquent, le seul cas qui reste est où $(y, y') = (x', x)$. Cela découlera du fait que G agit transitivement.

La dernière implication découle du fait que 1) est une condition plus faible que 3). $\square$

Exercice 5

Proof. Nous allons démontrer pour n couleurs générales. Soit X l'ensemble des fonctions de $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2 \cdots n\}$ (correspondant aux coloriages du carré). Le groupe d'isométries D_8 contient le groupe de rotation C_4 et 4 symétries.
Soit r un générateur de C_4. r^3 est également un générateur de ce groupe. C_4 agissant transitivement sur le carré, donc les points fixes des générateurs ne doivent être que des coloriages monochromes. Et donc,

$$|X^r| = |X^{r^3}| = n$$

r^2 correspond à une rotation de π et permet de fixer les coloriages qui ont la même couleur sur les côtés opposés. Donc,

$$|X^{r^2}| = n \times n = n^2$$

Pour l'identité i clairement,

$$|X^i| = n^4$$

correspondant à tout les coloriages.
Nous étudions maintenant les symétries. Il y a deux symétries qui préservent une paire de côtés opposés. Pour une telle symtrie, nous pouvons choisir 3 couleurs indépendamment et par conséquent,

$$|X^s| = n^3$$

Les deux dernières symétries ont pour axe la diagonale. Ces symétries nous permettront de choisir deux couleurs indépendamment (correspondant au nombre de paires de côtés identifiés par la symétrie). Nous avons donc pour une telle symétrie s'

$$|X^{s'}| = n^2$$

Enfin nous avons via le Lemme de Burnside,

$$C(4,n) = \frac{1}{8}(2 \times n + n^2 + n^4 + 2 \times n^3 + 2 \times n^2) = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8}$$

et si nous ne considérions que les rotations que nous aurions,

$$C'(4,n) = \frac{n^4 + n^2 + 2n}{4}$$

En particulier,

$$C(4,2) = 6 \qquad C(4,3) = 21 \qquad C(4,4) = 55$$

et,

$$C'(4,2) = 6 \qquad C'(4,3) = 24 \qquad C'(4,4) = 70$$

□

Exercice 6

Proof. Nous allons présenter les deux calculs. Soit X et Y l'ensemble des fonctions de $\{0,1,2,3,4\}$ à $\{R,B\}$ et de $\{0,1,2,3,4\}$ à $\{R,G,B\}$ respectivement (c'est-à-dire le nombre de colorations d'un pentagone avec deux et trois couleurs respectivement).
Le groupe d'isométries D_{10} agit sur le pentagone et consiste en 5 rotations et 5 symétries fixant un côté. Soit r une rotation non identitaire dans D_{10}. Le théorème de Lagrange nous dira que r doit tre un générateur du groupe C_5. Pour une telle rotation (il y en a 4),

$$|X^r| = 2 \qquad |Y^r| = 3$$

correspondant à des coloriages monochromes.
Pour l'identité i,

$$|X^i| = 2^5 \qquad |Y^i| = 3^5$$

correspondant à tous les coloriages.
Pour toute symétrie s, le point fixe doit avoir les mêmes couleurs sur les deux côtés qu'il reflète. Nous sommes libres de choisir des couleurs pour ces deux côtés et pour le côté sur lequel se produit le reflet. Donc,

$$|X^s| = 2^3 \qquad |Y^s| = 3^3$$

Nous utilisons le Lemme de Burnside pour voir,

$$C(5,2) = \frac{1}{10}(4 \times 2 + 1 \times 2^5 + 5 \times 2^3) = 8$$

et,

$$C(5,3) = \frac{1}{10}(4 \times 3 + 1 \times 3^5 + 5 \times 3^3) = 39$$

Pour n couleurs nous aurons,

$$C(5,n) = \frac{1}{10}(n^5 + 5n^3 + 4n)$$

Nous obtenons donc, le fait que le polynôme $n^5 + 5n^3 + 4n$ est toujours divisible par 10 pour une entrée entière positive. □

Exercice 7

Proof. Nous devons calculer la quantité $C(6,2)$, puisque nous pouvons considérer l'ajout de la molécule de chlore comme une coloration du vertex.
Soit X l'ensemble des fonctions de $\{0,1,2,3,4,5\} \to \{H, Cl\}$. Le groupe d'isométries est D_{12}. Nous choisissons r et r^5, les générateurs de C_6. Pour ces rotations clairement,

$$|X^r| = |X^{r^5}| = 2$$

correspondont à des coloriages monochromes.
Pour r^2 et r^4, la rotation va forcer les côtés alternés à avoir la même couleur et donc,

$$|X^{r^2}| = |X^{r^4}| = 4$$

La rotation d'ordre 2, r^3, va forcer trois paires de deux côtés à avoir la même couleur. Et donc,

$$|X^{r^3}| = 8$$

et pour ldentité i, clairement $|X^i| = 2^6 = 64$.
Maintenant nous étudions les symétries. Sur les 6 symétries, 3 symétries conserveront une paire de côtés opposés et pour ces symétries, nous pouvons choisir les couleurs de ces côtés opposés et de deux autres côtés indépendamment. Nous avons pour une telle symétrie s,

$$|X^s| = 16$$

Les 3 autres symétries ont leurs axes comme une paire de sommets et nous permettront de choisir les couleurs de 3 côtés indépendamment. Pour une telle symétrie s',

$$|X^{s'}| = 8$$

et donc,

$$C(6,2) = \frac{1}{12}(2 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 8 + 1 \times 64 + 3 \times 16 + 3 \times 8) = 13$$

$\square$