Série 1

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les boules ouvertes suivantes et justifiant la construction :

$$B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 < 1\}, \qquad B_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 < 1\},$$

$$B_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_3 < 1\}, \qquad B_\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_\infty < 1\}.$$

Devoir 2. Montrer rigoureusement que l'ensemble suivant est ouvert :

$$B_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 < 1\}.$$

A faire PENDANT le cours :

Exercice 1.

a) Démontrer l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+,$$

où $1 < p < \infty$ et q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Indication : Utiliser le fait que la fonction $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction concave et prendre le ln de la relation d'inégalité.

b) Démontrer que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité d'Hölder :

$$\big|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big| \leq \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q$$

où $1 \leq p \leq \infty$ (on note aussi $p \in [1, \infty]$) et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

<u>Indication</u> : Poser $\lambda = \|\mathbf{x}\|_p^{-1/q} \cdot \|\mathbf{y}\|_q^{1/p}$ et utiliser a) après avoir écrit $\big|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda |x_i| \cdot \dfrac{1}{\lambda} |y_i|$.

c) Montrer que $\| \cdot \|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$.

<u>Indication</u> : Partir de $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser (b) ci-dessus.

d) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 \ &\leq \ n^{1/q} \ \|\mathbf{x}\|_p, \qquad && \forall p \in [1, \infty], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\
\|\mathbf{x}\|_p \ &\leq \ n^{1/p} \ \|\mathbf{x}\|_\infty, && \forall p \in [1, \infty], \\
\|\mathbf{x}\|_\infty \ &\leq \ \|\mathbf{x}\|_1.
\end{aligned}$$

En déduire que toutes les normes $\| \cdot \|_p, \ p \in [1, \infty]$ sont équivalentes.

<u>**Exercice 2.**</u> Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les ensembles suivants :

$$\Omega_1 = \Big\{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\Big\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 = 1\Big\},$$

$$\Omega_3 = \Big\{(x_1, x_2) : \sin \frac{1}{x_1} < x_2 < 2, \ 0 < x_1 < 1\Big\},$$

$$\Omega_4 = \Big\{(x_1, x_2) : 1 < x_2 < 5 \text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_2 < 5 \text{ si } x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1\Big\},$$

$$\Omega_5 = \Big\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\Big\} \cup \Big\{(x_1, x_2) : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leq 1\Big\}.$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? fermés ? bornés ? et quel est leur bord ? Justifier votre réponse.

<u>**Exercice 3.**</u>

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un fermé tous deux non vides. Montrer qu'il existe $\mathbf{a} \in E$ et $\mathbf{b} \in F$ tels que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \inf \Big\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F \Big\}.$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-\dfrac{y}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1) \\ \neq}} f(x,y)$.

Quelques rappels

Exercice 5.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

est uniformément continue sur $[0,1]$ mais non lipschitzienne.

Exercice 6.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^x e^{-tx^2}\, dt.$$

Calculer $g'(x)$ après avoir commencé par intégrer et vérifier la règle de dérivation des intégrales par le calcul.

Exercice 7.

Soient $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les deux limites

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \qquad \text{et } \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$$

existent si et seulement si f est uniformément continue sur $]a, b[$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2x + \cos(x^2).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0.

Exercice 9.

A chaque nombre entier $n \geq 0$, on associe la fonction $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + \sin\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Exercice 10.

Soit $\lambda > 0$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$F(t) = \int_0^t \sigma(x) \sin\Big(\lambda(t - x)\Big)\, dx.$$

1°) Vérifier que F est la solution de l'équation différentielle

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = \lambda\sigma(t)$$

qui satisfait $u(0) = u'(0) = 0$.

2^o) Calculer $\int_0^2 x^5 \sin(2-x)\,dx$.