Série 2

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}.$$

Devoir 2. Etudier la continuité de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} y + \dfrac{1}{y}\arctan\left(x^2 y\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire, déterminer les points $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sur lesquels f est continue.

Indication : $|\arctan(\alpha)| \leq |\alpha|, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

A faire PENDANT le cours :

Exercice 1.

Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2xy}{x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t}\, dt & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Indications :

(1) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, calculer la dérivée de la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ donnée par $g(t) = \arctan\left(\dfrac{x\tan(t)}{y}\right)$.

(2) On utilise la relation $\arctan|s| + \arctan|\frac{1}{s}| = \frac{\pi}{2}, \forall s \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2.

Calculer

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \neq}} \frac{\ln\left(\dfrac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}.$$

Exercice 3.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0?$$

Exercice 4.

Soit $E=\{(x,\sin\frac{1}{x}):x>0\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.

2) Montrer que $\overline{E}=E\cup\{(0,y):-1\leq y\leq 1\}$.

3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5.

Soit E un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1) Montrer que si f et g coïncident sur E, elles coïncident sur $\overline{E}$.

2) Montrer que si pour tout $\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, alors cette inégalité reste valable sur $\overline{E}$.

Exercice 6.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1.) Montrer que $I = \{f(x) : x \in A\}$ est un intervalle.

2.) En déduire que si f ne s'annule pas, elle garde un signe constant.