Série 3

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. Soit la fonction

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer $\nabla f(x_1, x_2)$ (et en particulier $\nabla f(0,0)$). Est-ce que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Devoir 2. Soit la fonction

$$f(x_1, x_2) = |x_1|^3 + |x_2|^3, \quad \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer $\nabla f(x_1, x_2)$ (et en particulier $\nabla f(0,0)$). Est-ce que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?
Rappel : $(|t|)' = \dfrac{t}{|t|}$.

A faire PENDANT le cours :

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

Rappel : $\lim_{t \to 0} t \ln(t) = 0 \quad$ et $\quad (|t|)' = \dfrac{t}{|t|}$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $F : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x_1, x_2, x_3) = f\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}\right).$$

Calculer le gradient $\nabla F(\mathbf{x}) \underset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_3}(\mathbf{x})\right)$ au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3^3\right) - 1}{x_1}, & \text{si } x_1 \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Calculer $\nabla f(0, 0, 0)$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1^2 \operatorname{th}\left(\dfrac{x_2 + x_3^2}{x_1}\right), & \text{si } x_1 \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$

Calculer $\nabla f(0, 1, 1)$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction donnée de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norme euclidienne unité, i.e.,

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2} = 1.$$

Définition : On appelle dérivée de f dans la direction $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et on note $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x})$, la quantité

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

où l'opérateur $\cdot$ dénote le produit scalaire euclidien.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1\, \cos y_2 \sin y_3,$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3) = y_1\, \sin y_2 \sin y_3,$$

$$g_3(y_1, y_2, y_3) = y_1\, \cos y_3.$$

Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par $F(y_1, y_2, y_3) = f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$ où

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), g_3(\mathbf{y})) = (g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), g_3(y_1, y_2, y_3))$$

on demande de

1^o) Calculer explicitement $F(\mathbf{y})$;

2^o) Calculer $\nabla F(\mathbf{a})$ où $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$;

3^o) Vérifier dans ce cas particulier la formule :

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}), \quad k = 1, 2, 3.$$