Série 4

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Est-ce que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

Devoir 2. Calculer le polynôme de Taylor de degré 2 de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{en} \quad (1,0).$$

Devoir 3 (pas d'oral). Préparer les points 1 et 2 de l'exercice 6.

A faire PENDANT le cours :

Exercice 1.

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \displaystyle\int_0^t \sin\left(t(1+x^2)^{1/2}\right)\, dx$ admet un minimum local en $t=0$.

Exercice 2.

Trouver les points stationnaires de la fonction

$$f(x,y) = y^2 + y\cos(x) - \sin(x) - 2$$

et étudier leur nature.

Exercice 3.

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x_1, x_2) = 10x_1^2 \cos x_2 + \int_{x_1^2}^{x_2^2} \ln\sqrt{2 + x_1^4 + \cos(tx_2)}\, dt.$$

Calculer le gradient de cette fonction sur la droite d dont la paramétrisation est $x_1 = s, x_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

Soit $\lambda > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation (dite équation des ondes)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) - \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Indication : Effectuer le changement de variables : $u_1 = \lambda x_1 + x_2$ et $u_2 = -\lambda x_1 + x_2$.

Exercice 5.

Soit $f : \underset{(x_1,x_2,x_3)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{f(x_1,x_2,x_3)}{\mathbb{R}}$ une fonction de classe C^1.

Soit encore

- $g_i : \underset{(u_1,u_2)}{\mathbb{R}^2} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{g_i(u_1,u_2)}{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2, 3$, trois fonctions de classe C^1 ;
- $h_j : \underset{t}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{h_j(t)}{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$, deux fonctions de classe C^1.

On définit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(t) = f\Big(g_1\big(h_1(t), h_2(t)\big),\ g_2\big(h_1(t), h_2(t)\big),\ g_3\big(h_1(t), h_2(t)\big)\Big)$.
Calculer $F'(t)$.

Remarque. Les trois fonctions g_i paramétrisent une surface dans $\mathbb{R}^3$ et les deux fonctions h_j paramétrisent une courbe sur cette surface. $F(t)$ donne la valeur de la fonction f lorsqu'on parcourt la courbe dans l'espace.

Exercice 6.

On considère $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

1^o) Expliciter la matrice hessienne $S(\mathbf{a})$ de f au point $\mathbf{a}$.

2^o) Expliciter la formule de Taylor de f et établir que $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\bar{t} \in]0,1[$ tel que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{z}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S(\mathbf{a})\,\mathbf{z} + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}+\bar{t}\mathbf{z}) z_i z_j z_k$$

où $\mathbf{u}^T\,\mathbf{v}$ dénote le produit scalaire euclidien de deux vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

3^o) Démontrer que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{z}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S(\mathbf{a})\,\mathbf{z} + \mathcal{O}(\|\mathbf{z}\|^3) \text{ si } \mathbf{z} \to 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \big((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Trouver un polynôme p de degré deux tel que

$$|f(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^3), \quad \text{si } \mathbf{x} \to 0.$$

Exercice 8.

Le but est de démontrer la formule du reste intégral d'ordre 2. On considère $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{z}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{z} + \int_0^1 (1-t)\,\mathbf{z}^T S(\mathbf{a}+t\mathbf{z})\,\mathbf{z}\,dt$$

où $S(\mathbf{v})$ est la matrice hessienne de f au point $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.