Corrigé 1

Exercice 1.

a) Montrons l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+,$$

où $1 < p < \infty$ et q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Si $a = 0$ et/ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc que $a > 0$ et $b > 0$.
Si on pose $f(s) = \ln s$, on a $f'(s) = \frac{1}{s}$ et $f''(s) = -\frac{1}{s^2} < 0$ pour tout $s \in]0, \infty[$. Ainsi, la fonction $g(s) := -\ln s$ est convexe. Puisque $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$g(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \leq \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q)$$

et par suite

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a bien

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

b) Montrons que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité d'Hölder :

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q$$

où $1 \leq p \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

- Si $p = 1$ et $q = +\infty$, on a, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:
$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty \|\mathbf{y}\|_1.$$

- Soit $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $\mathbf{x} = 0$ ou/et $\mathbf{y} = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{y} \neq 0$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant l'inégalité d'Young :
$$\begin{aligned} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda |x_i| \cdot \frac{1}{\lambda}|y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^p}{p}|x_i|^p + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q\lambda^q}|y_i|^q = \frac{\lambda^p}{p}\|\mathbf{x}\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|\mathbf{y}\|_q^q. \end{aligned}$$

  Si on pose $\lambda = \|\mathbf{x}\|_p^{-1/q} \|\mathbf{y}\|_q^{1/p}$ on obtient, puisque $p - \frac{p}{q} = q - \frac{q}{p} = 1$:
$$\lambda^p \|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}\|_p^{p-p/q} \|\mathbf{y}\|_q = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$
  et
$$\lambda^{-q} \|\mathbf{y}\|_q^q = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q^{q-q/p} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$
  Ainsi,
$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q + \frac{1}{q}\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

c) Montrons que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$.

- Supposons $p \geq 1$: Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On a :
$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$
  On utilise maintenant l'inégalité de Hölder $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q$ avec $\mathbf{a} = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ et $\mathbf{b} = (|x_1 + y_1|^{p-1}, |x_2 + y_2|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1})$ ce qui donne :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} = |(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q &= \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right\}^{1/q} \\ &= \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

rappelant que, puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a $(p-1)q=p$ ainsi que $\frac{p}{q}=p-1$. On obtient de ma même manière

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|\ |x_i+y_i|^{p-1} \leq \|\mathbf{y}\|_p \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

et on a donc

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p \leq \Big(\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\Big) \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}.$$

Si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \neq 0$ on a l'inégalité triangulaire en divisant de part et d'autre par $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}$. Si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p = 0$, on l'a aussi trivialement.
Les autres propriétés d'un norme sont vérifiées trivialement.

- Supposons $0<p<1$: Soit $\mathbf{x}=(1,0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y}=(0,0,0,\ldots,0,1)\in\mathbb{R}^n$. On a $\|\mathbf{x}\|_p=\|\mathbf{y}\|_p=1$ et $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p=2^{1/p}>2$. On n'a donc pas l'inégalité triangulaire avec ces deux vecteurs et donc $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

d) Si $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose $|\mathbf{x}|=(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$. Montrons les inégalités suivantes :

- En posant $\mathbf{y}=(1,1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$ dans b), on obtient :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = (|\mathbf{x}|,\mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q = n^{1/q}\|\mathbf{x}\|_p$$

où $p\in[1,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

- On a $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(n \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty$ et donc

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty, \quad p\in[1,\infty[.$$

Pour $p=+\infty$, l'inégalité est trivialement vraie.

- On a $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$ et donc

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

Montrons maintenant que toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p\in[1,\infty]$ sont équivalentes. Soit donc $p,r\in[1,\infty]$. On a, pour $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\|_p \le n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty \le n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_1 \le n^{1/p}\cdot n^{1/s}\|\mathbf{x}\|_r \le n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{s}}\|\mathbf{x}\|_r$$

avec $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, ce qui montre que n'importe quelle norme $\|\cdot\|_p$ peut être majorée par une norme $\|\cdot\|_r$ indépendemment de $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.

a) L'ensemble $\Omega_1 = \big\{(x_1,x_2) : 1 < x_1^2+x_2^2 < 16\big\}$ est une couronne ouverte centrée à l'origine.

- Montrons que l'ensemble est ouvert. Si $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\Omega_1$, il suffit de prendre
$$\delta = \frac{1}{2}\min\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1\,;\,4-\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$
pour obtenir
$$B_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{x},\delta)\subset\Omega_1.$$
En effet, si $\mathbf{y}\in B_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{x},\delta)$, alors, par définition de δ, on a $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 < \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2-1)$ et $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 < \frac{1}{2}(4-\|\mathbf{x}\|_2)$. Cela conduit à
  (i) $\|\mathbf{y}\|_2 \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2+\|\mathbf{x}\|_2 < \frac{1}{2}(4-\|\mathbf{x}\|_2)+\|\mathbf{x}\|_2 = \frac{1}{2}(4+\|\mathbf{x}\|_2) < 4$
  (ii) $\|\mathbf{y}\|_2 \ge \|\mathbf{x}\|_2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 > \|\mathbf{x}\|_2-\frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2-1) = \frac{1}{2}(1+\|\mathbf{x}\|_2) > 1.$
On a donc bien que $\mathbf{y}\in\Omega_1$.
- Ω_1 est borné car $\|\mathbf{x}\|_2\le 4,\ \forall\mathbf{x}\in\Omega_1$.
- Enfin, le bord de Ω_1 est donné par
$$\Gamma = \big\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2=1\big\}\cup\big\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2=16\big\}.$$
En effet si $x_1^2+x_2^2=1$ et si $\delta>0$, on vérifie aisément que $B_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{x},\delta)\cap\Omega_1\neq\varnothing$ et $B_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{x},\delta)\cap\Omega_1^c\neq\varnothing$. De même si $x_1^2+x_2^2=16$.

b) Soit $\Omega_2 = \big\{(x_1,x_2) : x_1^2-x_2^2=1\big\}$, on a $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$. Par le changement de variables
$$y_1=x_1-x_2,\ y_2=x_1+x_2,$$
on obtient $\Omega_2=\big\{(y_1,y_2) : y_1y_2=1\big\}$ qui est une hyperbole dans le système d'axe Oy_1y_2.

Il s'agit d'un ensemble fermé. En effet on a $\Omega_2^c = \big\{(x_1,x_2) : x_1^2-x_2^2\neq 1\big\}$ est ouvert. Pour s'en convaincre on considère un point $\mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\Omega_2^c$ et on montre qu'il existe

$\delta > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_1}(\mathbf{z}, \delta) \subset \Omega_2^c$.

Sans restriction de la généralité supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ (la démarche est identique si on suppose $\varepsilon < 0$) tel que

$$z_1^2 - z_2^2 - 1 = \varepsilon > 0.$$

En choisissant $\delta \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{8(|z_1|+|z_2|)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}}\right\}$ alors tout point $(w_1, w_2) \in B_{\|\cdot\|_1}(\mathbf{z}, \delta)$ s'écrit

$$w_1 = z_1 + \delta_1 \quad \text{et} \quad w_2 = z_2 + \delta_2, \quad \text{avec} \quad |\delta_1| + |\delta_2| < \delta,$$

et vérifie

$$\begin{aligned} w_1^2 - w_2^2 - 1 &= z_1^2 - z_2^2 - 1 + 2\delta_1 z_1 - 2\delta_2 z_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 \\ &> \varepsilon - \left(2\delta\ (|z_1| + |z_2|) + 2\delta^2\right) > \frac{\varepsilon}{2} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $B_{\|\cdot\|_1}(\mathbf{z}, \delta) \subset \Omega_2^c$ et Ω_2^c est ouvert.

On vérifie sans difficulté que le bord de Ω_2 est Ω_2 lui-même et que Ω_2 n'est pas borné.

c) Soit $\Omega_3 = \left\{(x_1, x_2) : \sin\frac{1}{x_1} < x_2 < 2, 0 < x_1 < 1\right\}$. Il s'agit d'un ensemble ouvert.

Soit $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \Omega_3$. Cherchons $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ de sorte que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\times]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[\subset \Omega_3$. Posons $\delta_2 = \frac{1}{2}(\overline{x}_2 - \sin(\frac{1}{\overline{x}_1})) > 0$. Puisque la fonction $x_1 \mapsto \sin(\frac{1}{x_1})$ est continue en $\overline{x}_1$, on a l'existence de $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left|\sin(\frac{1}{x_1}) - \sin(\frac{1}{\overline{x}_1})\right| < \delta_2,\ \forall x_1 \text{ qui vérifie } |x_1 - \overline{x}_1| < \delta_1.$$

Finalement si $(x_1, x_2) \in\ ]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\ \times\ ]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[$ alors

$$\sin(\frac{1}{x_1}) < \sin(\frac{1}{\overline{x}_1}) + \delta_2 = \frac{1}{2}\left(\sin(\frac{1}{\overline{x}_1}) + \overline{x}_2\right) = \overline{x}_2 - \delta_2 < x_2.$$

Il suffit maintenant de réduire δ_1 de sorte que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\subset]0, 1[$ et δ_2 de sorte que : $\overline{x}_2 + \delta_2 < 2$. Cela montre que $B_{\|\cdot\|_\infty}(\overline{\mathbf{x}}, \min(\delta_1, \delta_2)) \subset \Omega_3$.
Il est vivement conseillé d'agrémenter cette preuve d'un dessin.

L'ensemble Ω_3 est borné car $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 3,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_3$. Le bord de Ω_3 est donné par

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = \sin\frac{1}{x_1}\} \ \cup\ \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\} \\ \cup\ &\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 2\} \ \cup\ \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, \sin 1 \leq x_2 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Montrons seulement que $\{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\} \subset \partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est le bord de Ω. En effet si $x_1 = 0$ et $-1 \leq x_2 \leq 2$ et si $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0, \varepsilon < 1$ tel que $\sin\frac{1}{\varepsilon} = -1$

avec $\varepsilon < \delta$. Ainsi $(\varepsilon, x_2) \in \Omega_3$ et $(\varepsilon, x_2) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{x}, \delta)$. D'autre part $B_{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega_3^c \neq \varnothing$.

d) $\Omega_4 = \{(x_1, x_2) : 1 < x_2 < 5 \text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_2 < 5 \text{ si } x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1\}$. Ω_4 n'est ni ouvert, ni fermé. En effet,

i.) Soit $x_1 \in]0,1[, x_1 \notin \mathbb{Q}, x_2 \in]0,1[$. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et si $\delta > 0$, on a

$$\mathbf{x} \in \Omega_4 \qquad \text{et} \qquad B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega_4^c \neq \varnothing.$$

Ainsi $\mathbf{x} \in \partial\Omega_4$, ce qui montre que $\underline{\Omega_4 \text{ n'est pas ouvert}}$.

ii). Si maintenant $x_1 \in]0,1[, x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in]0,1[$, alors $\mathbf{x} \notin \Omega_4$ et si $\delta > 0$ on a $B(\mathbf{x}, \delta) \cap \Omega_4 \neq \varnothing$, ce qui prouve que Ω_4^c n'est pas ouvert ; donc $\underline{\Omega_4 \text{ n'est pas fermé}}$.

Ω_4 est borné car $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_4$.
Le bord de Ω_4 est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega_4 =& \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1 \leq x_2 \leq 5\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 1 \leq x_2 \leq 5\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_2 = 5, 0 \leq x_1 \leq 1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

En effet, pour tout point $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$ et pour tout $\delta > 0$, le disque $B(\mathbf{x}, \delta)$ contient des points de Ω_4 et des points de Ω_4^c. Les trois autres contributions sont triviales.

e) $\Omega_5 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$. Ω_5 est la réunion

- de C_1, disque ouvert centré en $(0,0)$, de rayon 1, et
- de C_2, disque fermé centré en $(1,1)$ de rayon 1.

Il s'agit d'un ensemble ni ouvert ni fermé : le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ est sur le bord de Ω_5 mais n'appartient pas à Ω_5 et le point $(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ n'est pas un point intérieur.
Ω_5 est borné, car contenu dans la boule centrée au point $(0,0)$ et de rayon 25.
Le bord de Ω_5 est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega_5 =& \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_1 \geq 1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_2 \geq 1\},\end{aligned}$$

i.e., l'intersection des bords de C_1 et de C_2.

Exercice 3.

Posons $\sigma = \inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F\}$. Des propriétés de l'infimum, il existe

a.) une suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ d'éléments de E,

b.) une suite $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$ d'éléments de F,

telles que

$$\sigma = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|.$$

D'une part, E étant compact, de la suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ on peut extraire une sous-suite $(\mathbf{x}_{k_p})_{p=0}^{\infty}$ qui converge vers $\mathbf{a} \in E$. D'autre part, la suite $(\mathbf{y}_{k_p})_{p=0}^{\infty}$ étant bornée (car $\|\mathbf{y}_{k_p}\| \le \|\mathbf{x}_{k_p}\| + \|\mathbf{x}_{k_p} - \mathbf{y}_{k_p}\|$) on peut en extraire une sous-suite $(\mathbf{y}_{k_{p_q}})_{q=0}^{\infty}$ qui converge vers $\mathbf{b}$. De plus, $\mathbf{b} \in \overline{F} = F$. Finalement, puisque pour toute suite $(\mathbf{z}_k)_{k=0}^{\infty}$ qui converge vers $\mathbf{z}$, on a $\|\mathbf{z}\| = \|\lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_k\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{z}_k\|$, on a :

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \lim_{q\to\infty} \|\mathbf{x}_{k_{p_q}} - \mathbf{y}_{k_{p_q}}\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = \sigma.$$

Remarque : σ peut être interprété comme une **distance** entre E et F.

Exercice 4.

Si $x = 0$, on a trivialement $\lim\limits_{y\to 1} f(0,y) = 0$.
Sinon, on considère la fonction $g(x,y) = \frac{x^2}{y} e^{\frac{y}{x^2}}$ définie pour (x,y) dans un voisinage de $(0,1)$, $x \neq 0$. Dans le voisinage considéré, en excluant l'axe des ordonnés ($x = 0$), on a bien sûr $\frac{1}{f(x,y)} = g(x,y)$.

Soit $C > 0$.

- Puisque $\lim\limits_{s\to 0} s e^{1/s} = \infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$s e^{1/s} \ge C, \ \forall s \in]0,\varepsilon].$$

- De manière évidente, il existe $\delta > 0$ tel que $0 \leq \frac{x^2}{y} \leq \epsilon$ si $|x| \leq \delta$ et $|y-1| \leq \delta$.

- Ainsi, si $|x| \leq \delta$ et $|y-1| \leq \delta$, on obtient $g(x,y) \geq C$, ce qui prouve que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ \neq}} f(x,y) = 0.$$

Exercice 5.

La fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \sin x$$

est continue sur $[0,1]$ et non-négative. Ainsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{g(x)}$ est continue sur un intervalle compact. Mais une fonction continue sur un compact est uniformément continue. f est donc uniformément continue.
La fonction $f \in C^1\left(]0,1[\right)$ et on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \qquad \forall x \in]0,1[.$$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = +\infty$.
Par l'absurde, si f était lipschitzienne sur $[0,1]$, on aurait l'existence d'une constante C telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

Ainsi, en passant à la limite on aurait

$$|f'(x)| \leq C, \qquad \forall x \in]0,1[,$$

ce qui contredit $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = +\infty$.

Exercice 6.

On a

$$g(x) = \int_0^x e^{-t\,x^2}\,dt = \left|\frac{e^{-t\,x^2}}{-x^2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{e^{-x^3}}{-x^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi

$$g'(x) = e^{-x^3}\cdot 2x^{-3} + 3x^2\frac{e^{-x^3}}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{2e^{-x^3}}{x^3} + 3e^{-x^3} - \frac{2}{x^3}.$$

Vérifions maintenant la formule de dérivation d'une intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= e^{-t\,x^2}\Big|_{t=x} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t\,x^2}\right) dt = e^{-x^3} + \int_0^x e^{-t\,x^2}\,(-2t\,x)\,dt \\
&= e^{-x^3} - 2x \int_0^x \underbrace{e^{-t\,x^2}}_{u'(t)}\ \underbrace{t}_{v(t)}\,dt \\
&= e^{-x^3} - 2x\left[\frac{e^{-t\,x^2}}{-x^2}\,t\,\Bigg|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{e^{-t\,x^2}}{-x^2}\,dt\right] \\
&= e^{-x^3} + 2e^{-x^3} - \frac{2}{x}\left|\frac{e^{-t\,x^2}}{-x^2}\right|_{t=0}^{t=x} = 3e^{-x^3} + \frac{2e^{-x^3}}{x^3} - \frac{2}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Exercice 7.

Soit $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Montrons que les deux limites

$$\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) \qquad \text{et } \lim_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$$

existent si et seulement si f est uniformément continue sur $]a,b[$.

Démonstration :

- Supposons f uniformément continue sur $]a,b[$.
  Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset]a,b[$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et soit $\varepsilon > 0$.
  Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que

  $$\forall x, y \in]a,b[,\, |x-y| \le \delta, \quad \text{on a } |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

  Puisque $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - a_m| \le \delta,\ \forall n, m \ge N$. Ainsi

  $$|f(a_n) - f(a_m)| \le \varepsilon,\ \forall n, m \ge N,$$

  et $\Big(f(a_n)\Big)_{n=0}^{\infty}$ est aussi une suite de Cauchy et donc elle converge. Soit ℓ sa limite.

  On conclut que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = \ell$.
  On procède de même pour $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$.

- Supposons maintenant que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)$ existent.
  On peut alors prolonger f pour obtenir une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$f(x) = g(x)$, $\forall x \in]a,b[$, $g(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$, $g(b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$. Cette fonction g est alors uniformément continue sur $[a,b]$ et donc f l'est sur $]a,b[$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2x + \cos x^2$. On demande le développement de Taylor qui fournit un développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$.
On a successivement :
- $f(0) = 1$;
- $f'(x) = 2 - 2x \sin x^2$ et ainsi $f'(0) = 2$;
- $f''(x) = -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$ et ainsi $f''(0) = 0$;
- $f'''(x) = 8x^3 \sin x^2 - 12x \cos x^2$ et donc $f'''(0) = 0$;
- $f^{(4)}(x) = 16x^4 \cos x^2 + 24x^2 \sin x^2 - 12 \cos x^2 + 24x^2 \sin x^2$ et $f^{(4)}(0) = -12$.

Ainsi $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(|x|^5)$ si $x \to 0$.

On aurait aussi pu procéder autrement : le développement de Taylor d'ordre 2 de $\cos(y)$ autour de $y = 0$ s'écrit :

$$\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}\, y^2 + r(y),$$

où $r(z) = \mathcal{O}(|z|^4)$ si $z \to 0$, i.e., il existe $\delta > 0, C > 0$ tels que $|r(z)| \leq C|z|^4$, si $|z| \leq \delta$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x^2 = 0$, on peut substituer y par x^2 dans le développement ci-dessus pour obtenir

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}\, x^4 + r(x^2).$$

Si $|x| \leq \sqrt{\delta}$ alors $|x|^2 \leq \delta$ et ainsi $|r(x^2)| \leq C|x|^8$.

Finalement, on obtient $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(|x|^8)$ si $x \to 0$.

Exercice 9.

Soit $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + \sin\left(\dfrac{x}{n+1}\right)$. On constate que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, autrement dit la suite de fonctions converge ponctuellement vers $f \equiv 0$ sur

$[0, \frac{1}{2}]$. De plus, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{x}{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2(n+1)}, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Si ε est donné, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^N + \frac{1}{2(N+1)} \leq \varepsilon$ et ainsi pour $n \geq N$ on a

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$$

La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge donc uniformément vers $f \equiv 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Exercice 10.

Soit $\lambda > 0$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$F(t) = \int_0^t \sigma(x) \sin\Big(\lambda(t-x)\Big)\, dx.$$

1^o) En posant $f(x,y) = \sigma(x)\sin\Big(\lambda(y-x)\Big)$, $h(t) = 0$, $g(t) = t$ et $k(t) = t$, on peut calculer

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sigma(t)\sin\Big(\lambda(t-t)\Big) + \lambda \int_0^t \sigma(x)\cos\Big(\lambda(t-x)\Big)\, dx \\ &= \lambda \int_0^t \sigma(x)\cos\Big(\lambda(t-x)\Big)\, dx. \end{aligned}$$

Remarque : on peut utiliser le schéma simple qui découle de la formule pour calculer $F'(t)$: si t est la variable par rapport à laquelle on dérive et x la variable d'intégration, $F'(t)$ est la somme des 3 termes suivants :

- (la dérivée par rapport à t de la borne sup) multipliée par (l'intégrant dans lequel on substitue x par cette borne sup)
- (-1) * (la dérivée par rapport à t de la borne inf) multipliée par (l'intégrant dans lequel on substitue x par cette borne inf)
- l'intégrale de la borne inf à la borne sup de la dérivée partielle de l'intégrant par rapport à t.

En dérivant encore une fois, on obtient :

$$\begin{aligned} F''(t) &= \lambda\sigma(t)\cos\Big(\lambda(t-t)\Big) - \lambda^2 \int_0^t \sigma(x)\sin\Big(\lambda(t-x)\Big)dx \\ &= \lambda\sigma(t) - \lambda^2 F(t). \end{aligned}$$

Ainsi $F''(t) + \lambda^2 F(t) = \lambda\sigma(t)$. De plus, on a $F(0) = F'(0) = 0$.

2^o) Posons $\sigma(x) = x^5$ et $\lambda = 1$. On a dans ce cas

$$\int_0^2 x^5 \sin(2-x)\, dx = F(2).$$

D'après le point 1^o), on peut considérer l'équation différentielle suivante

$$u''(t) + u(t) = t^5.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t^1 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5.$$

En injectant cette solution dans l'équation on peut identifier les coefficients

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_1 = 120, \alpha_3 = -20, \alpha_5 = 1.$$

Puisque $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$, on doit avoir $c_1 = 0$ et $c_2 = -120$.
Ainsi, la solution unique de

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = t^5, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = -120 \sin t + 120t - 20t^3 + t^5.$$

On a ainsi

$$u(2) = F(2) = -120 \sin 2 + 240 - 160 + 32 = -120 \sin 2 + 112.$$