Série 5

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y} + t^2\mathbf{z}).$$

(1) Calculer $g'(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Calculer $g'(t)$ dans le cas particulier donné par $n = 3$ et $f(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Devoir 2. Montrer que l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y e^y = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.

Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

A faire PENDANT le cours :

Exercice 1.

On considère la $n \times n$ matrice A de coefficients $(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définis par

$$\begin{cases} A_{ij} = 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ A_{ij} = -1 & \text{si } |i-j| = 1, \\ A_{ij} = 2 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x},$$

démontrer que f prend son minimum en $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Exercice 2.

Montrer que l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \text{Arctg } xyz + \ln\frac{\sqrt{1+x+z}}{3z} + \ln\sqrt[3]{y^2+z^3} = 0$$

définit, au voisinage du point $(1, 0)$, une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ telle que $\phi(1, 0) = 7$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$.

Exercice 3.

Montrer que les deux équations

$$\begin{cases} x - y^3 + z + 8 = 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0 \end{cases}$$

définissent, au voisinage du point 0, deux fonctions implicites

$$y = \phi_1(x) \qquad \text{et} \qquad z = \phi_2(x)$$

telles que

$$\phi_1(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \phi_2(0) = 0.$$

Donner l'équation de la tangente à chacune des deux courbes

$$y = \phi_1(x) \qquad \text{et} \qquad z = \phi_2(x)$$

au point $x = 0$.

Exercice 4.

On considère les deux équations dont les variables sont x, y, u, v suivantes :

$$\begin{cases} x - u^2 + v^2 = 0, \\ y - uv + 1 = 0. \end{cases}$$

Montrer que $x = 0, y = 0, u = 1, v = 1$ est une solution et qu'il existe $\delta > 0$ et deux fonctions

$$\varphi_1 : B((0,0),\delta) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_2 : B((0,0),\delta) \to \mathbb{R}$$

de classe C^1 qui satisfont :

$$\begin{cases} x - \varphi_1^2(x,y) + \varphi_2^2(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in B((0,0),\delta), \\ y - \varphi_1(x,y)\varphi_2(x,y) + 1 = 0, & \forall (x,y) \in B((0,0),\delta), \end{cases}$$

avec $\varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 1$.

Calculer $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(0,0)$ pour $j = 1, 2$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2m}$$

où m est un entier strictement positif et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$.

a) Calculer $\nabla f(\mathbf{x})$.

b) Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, expliciter le polynôme $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de degré 1, tq $\|\mathbf{x}\|^{2m} = p(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$ si $\mathbf{x} \underset{\neq}{\to} \mathbf{a}$.