Corrigé 2

Exercice 1.

On se propose de montrer que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et considérons l'intégrale définissant $f(x,y)$. Puisque ni $\sin t$, ni $\cos t$ ne s'annulent sur l'intervalle $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, l'intégrale est bien définie et on a

1) si $x = 0$, alors $f(0,y) = 0$,
2) si $y = 0$, alors $f(x,0) = 0$,
3) si $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, alors on a, remarquant que $2\text{arctan}\left(\frac{x\text{tg}t}{y}\right)$ est une primitive de l'intégrant :

$$\begin{aligned}
1\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2xy}{x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t}\,dt &= 2\frac{y}{x}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t\left(\text{tg}^2 t + \frac{y^2}{x^2}\right)} = 2\text{arctan}\left(\frac{x\text{tg}t}{y}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 2\left[\text{arctan}\left(\frac{x\sqrt{3}}{y}\right) - \text{arctan}\left(\frac{x}{y\sqrt{3}}\right)\right]
\end{aligned}$$

sachant que $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Utilisant maintenant la relation $\text{arctan}\,|s| + \text{arctan}\,|\frac{1}{s}| = \frac{\pi}{2}, \forall s \in \mathbb{R}^*$, qui traduit le fait que la somme des deux angles obtus d'un triangle rectangle vaut $\frac{\pi}{2}$, on a finalement, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$:

$$f(x,y) = 2\left(\text{arctan}\left(\frac{x\sqrt{3}}{y}\right) - \text{arctan}\left(\frac{x}{y\sqrt{3}}\right)\right) = 2\left(\text{arctan}\left(\frac{y\sqrt{3}}{x}\right) - \text{arctan}\left(\frac{y}{x\sqrt{3}}\right)\right)$$

et donc, en passant, $f(x,y) = f(y,x)$. De plus, si $x = y = s$, on a $f(s,s) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \frac{\pi}{3}$.

On est maintenant en mesure de conclure en ce qui concerne la continuité de la fonction f :

1) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, la fonction f est continue au point (x,y) puisque la fonction $\arctan :]-\infty, +\infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue.

2) La fonction f est discontinue en $(0,0)$ puisque $\lim_{s\to 0} f(s,s) = \dfrac{\pi}{3} \neq 0 = f(0,0)$.

3) Soit $a \neq 0$. La fonction f est continue au point $(a,0)$ puisque

   (a) pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on a $|f(x,y) - f(a,0)| = |f(x,y) - 0| \leq 2\left|\frac{y}{x}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, en utilisant le théorème des accroissements finis et le fait que $(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} < 1$.

   (b) pour $(x,0) \in \mathbb{R}^* \times \{0\}$, on a $|f(x,0) - f(a,0)| = |0 - 0| \leq 2\left|\frac{y}{x}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

   En effet, soit $\delta > 0$ tel que la boule $B((a,0),\delta)$ ne contienne pas l'origine. Alors, pour $(x,y) \in B((a,0),\delta)$ on a $|x| > |a| - \delta$ et $|y| < \delta$ et donc $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{\delta}{|a|-\delta}$. Soit alors $\epsilon > 0$. En prenant

$$\delta = \min\left(|a|, \frac{|a|\epsilon}{2(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \epsilon}\right)$$

   on aura $|f(x,y) - f(a,0)| < \epsilon$ si $(x,y) \in B((a,0),\delta)$.

4) Soit $b \neq 0$. La fonction f est continue au point $(0,b)$. On peut, soit faire un calcul analogue à celui vu au point 3, soit invoquer la symétrie de la fonction f.

<u>Exercice 2.</u>

On pose $x_1 = x, x_2 = y$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On a

$$\frac{\ln\left(\dfrac{1 + x_1^4 + x_2^4}{1 + \|\mathbf{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)} = \frac{\ln(1 + x_1^4 + x_2^4)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)} - \frac{\ln(1 + \|\mathbf{x}\|^2)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)}.$$

Séparément, ces deux limites valent :

(1^o)

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{x}\| \to 0 \\ \neq}} \frac{\ln(1+\|\mathbf{x}\|^2)}{\sin\|\mathbf{x}\|^2} = \lim_{\substack{r \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+r)}{\sin r} = 1.$$

(2^o)

$$0 \ \leq \ \frac{\ln(1+x_1^4+x_2^4)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)} \ \leq \ \frac{\ln(1+\|\mathbf{x}\|^4)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)} \underset{\|\mathbf{x}\| \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2) \to (0,0) \\ \neq}} \frac{\ln\left(\dfrac{1+x_1^4+x_2^4}{1+\|\mathbf{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\mathbf{x}\|^2)} \ = \ -1.$$

Exercice 3.

1) Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2 + (1-\frac{y}{x})^2} = 0$$

et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = 0$ on a finalement que

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x,y) \right) = 0.$$

2) On ne peut pas en déduire que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0?$$

car, par exemple $\lim\limits_{t \to 0} f(t,t) = 1$.

Exercice 4.

1) Montrons que E est connexe par arcs.
En effet, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ sont deux éléments de E, l'application $\gamma : [0,1] \to E$ définie par

$$\gamma(t) = \left(a_1 + t(b_1 - a_1), \, \sin \frac{1}{a_1 + t(b_1 - a_1)} \right)$$

est un chemin de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

2) Montrons que $\overline{E} = E \cup A$ où $A = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$. Pour cela, posons $F = E \cup A$ et montrons les deux inclusions :

- Montrons pour commencer que $F \subset \overline{E}$:
Puisque $E \subset \overline{E}$ il suffit de montrer $A \subset \overline{E}$. Soit donc $(0, b) \in A$. La suite $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ définie par
$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{\operatorname{Arcsin} b + 2(k+1)\pi},\ b \right)$$
est une suite d'éléments de E qui converge vers $(0, b)$. En effet, posons $z_k = \operatorname{Arcsin} b + 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. La fonction Arcsin étant définie de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $z_k \geq \pi > 0$. De plus, $\sin z_k = b$ et $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{z_k} = 0$. On en conclut que $(0, b) \in \overline{E}$ et donc que $F \subset E$.

- Montrons ensuite que $\overline{E} \subset F$: Soit $(c, d) \in \overline{E}$. Il existe une suite $(c_k, \sin \frac{1}{c_k})_{k=0}^{\infty}$ d'éléments de E qui converge vers (c, d), ce qui revient à dire :
$$\lim_{k\to\infty} c_k = c \geq 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \sin \frac{1}{c_k} = d.$$
Par conséquent, ou bien $c > 0$ et $\sin \frac{1}{c} = d$ ou bien $c = 0$ et $-1 \leq d \leq 1$. Et donc $(c, d) \in F$. Ce qui prouve que $\overline{E} \subset F$.
Remarquons que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sin \frac{1}{c_k} = d$ ne contredit pas le fait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

3) Montrons que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il l'est.
Il existe donc un chemin continu $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \subset \overline{E}$, $t \in [0, 1]$ d'origine $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1)$ et d'extrémité $\boldsymbol{\gamma}(1) = (1, \sin 1)$. Posons $\alpha = \inf\{r \in [0, 1] : \gamma_1(t) > 0, \forall t \in [r, 1]\}$. Ainsi, sur l'intervalle $]\alpha, 1]$ le chemin reste sur E et on a $\displaystyle\lim_{\substack{t\to\alpha \\ >}} \gamma_1(t) = \gamma_1(\alpha) = 0$. On a alors que $\displaystyle\lim_{\substack{t\to\alpha \\ >}} \gamma_2(t)$ n'existe pas. On ne peut donc pas avoir $\displaystyle\lim_{\substack{t\to\alpha \\ >}} \gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha)$.

Exercice 5.

Soit E un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1) Montrons que si f et g coïncident sur E, elles coïncident sur $\overline{E}$.

Démonstration : Par définition on a $\overline{E} = E \cup \partial E$. Il suffit donc de montrer que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial E$. Soit $\mathbf{x} \in \partial E$. Par définition du bord, il existe $(\mathbf{x}_m)_{m=0}^{\infty} \subset E$ tel que

$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$. Puisque f et g sont continues au point $\mathbf{x}$ et coïncident au point $\mathbf{x}_m$, $m \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} f(\mathbf{x}_m) = \lim_{m\to\infty} g(\mathbf{x}_m) = g(\mathbf{x}).$$

2) Montrons que si pour tout $\mathbf{x} \in E$: $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, alors cette inégalité reste valable sur $\overline{E}$.

Démonstration : On utilise les mêmes notations que ci-dessus. Si $\mathbf{x} \in \partial E$ et si $(\mathbf{x}_m)_{m=0}^{\infty}$ est une suite dans E qui converge vers $\mathbf{x}$, on a :

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} f(\mathbf{x}_m) \leq \lim_{m\to\infty} g(\mathbf{x}_m) = g(\mathbf{x})$$

puisque f et g sont continues au point $\mathbf{x}$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $f(\mathbf{x}_m) \leq g(\mathbf{x}_m)$.

Exercice 6.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1.) Montrer que $I = \{f(x) : x \in A\}$ est un intervalle.

2.) En déduire que si f ne s'annule pas, elle garde un signe constant.

Démonstration :

1.) Montrons que I est un intervalle. Si I ne contient qu'un point, on a terminé, I est un intervalle.
Supposons donc que I contienne deux points distincts, $\alpha < \beta$ et montrons alors que I contient tout l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Démonstration :

— Par définition de I, il existe $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ tels que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ et $f(\mathbf{a}) = \alpha$ et $f(\mathbf{b}) = \beta$.

— Puisque A est connexe par arcs, il existe un arc $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to A$ continu tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{b}$.

— Ainsi, la fonction composée $h : [0,1] \to I$ définie par $h(t) = f(\boldsymbol{\gamma}(t))$, $t \in [0,1]$ est continue et on a $h(0) = \alpha$ et $h(1) = \beta$.

— Par le théorème de la valeur intermédiaire, h prend toutes les valeurs entre α et β, i.e., pour tout $\mu \in]\alpha, \beta[$, il existe $t \in]0,1[$ tel que $h(t) = \mu$ et donc il existe $\mathbf{c} = \boldsymbol{\gamma}(t) \in A$ tel que $f(\mathbf{c}) = \mu$.

— Comme on peut tenir ce raisonnement pour tout couple $\alpha < \beta \in I$, on en conclut que I est un intervalle.

2.) Si f ne s'annule pas, I ne contient pas 0 et donc on a soit $I \subset]-\infty, 0[$ soit $I \subset]0, +\infty[$. Ainsi f ne change pas de signe.