# Série 6

A préparer AVANT le cours :

**Devoir 1.** Trouver les extréma de la fonction

$$f(x,y) = \int_x^y t\, e^{-t^2}\, dt, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

sous la condition $e^{x^2} + e^{y^2} = 8$.

**Devoir 2.** On considère le triangle

$$D = \{(x,y) : -2y \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calculer $\displaystyle\iint_D x^3 y^2 dxdy$.

**Devoir 3 (à rédiger).** Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $(a,b,c) \in E$ et une fonction $f = f(x,y,z) \in C^2(E)$ telle que $f(a,b,c) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$. Soit $\phi$ la fonction implicite de classe $C^2$ définie au voisinage de $(a,b)$ telle que $\phi(a,b) = c$ et $f(s,t,\phi(s,t)) = 0$.

En supposant que $(a,b)$ est un point stationnaire de $\phi$, calculer explicitement les dérivées partielles d'ordre 2 de $\phi(s,t)$ en $(a,b)$.

A faire PENDANT le cours :

**Exercice 1.**

Calculer

$$\min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=2}} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Vérifier le résultat en exprimant $x_1, x_2$ comme fonctions de $x_3$ qui satisfont les deux contraintes.

**Exercice 2.**

Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire $A$, celui qui a la plus petite hypoténuse.

**Exercice 3.**

Minimiser la distance de $P$ à $Q$ où $P$ est un point de l'ellipsoïde d'équation $x^2+4y^2+4z^2-1=0$ et $Q$ un point de la droite passant par le point $A=(2,1,1)$ et parallèle au vecteur $\vec{v}=(1,0,0)$.

*Rappel :* Si $P$ est un point de l'espace $\mathbb{R}^3$, la plus courte distance de $P$ à la droite passant par le point $A$ et parallèle au vecteur $\vec{v}$ est donnée par :

$$d = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

**Exercice 4.**

On considère le parallélogramme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de sommets

$$A=(0,0), \quad B=(0,-1), \quad C=(1,0), \quad D=(1,1).$$

Calculer $\displaystyle\iint_\Omega x^2 \sin y \; dxdy.$

**Exercice 5.**

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ non vide, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $E$ et définie au voisinage de $\mathbf{a}$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a} \\ \neq}} f(\mathbf{x})$ existe.

**Exercice 6.**

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \int_t^{t^3} \cos(tx^2)\, dx.$$

a) Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$.

b) Montrer que la fonction $f$ admet un point d'inflexion en $t=0$.