Corrigé 3

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^1.

Démonstration : Puisque $(|t|)' = \dfrac{t}{|t|}$, le gradient de f est donné par :

- Si $(x_1, x_2) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= x_2 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_1| x_2}{|x_1| + |x_2|}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= x_1 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_2| x_1}{|x_1| + |x_2|}. \end{aligned}$$

- Si $(x_1, x_2) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{t \cdot 0 \ln(|t|) - 0}{t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{0 \cdot t \ln(|t|) - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

De plus pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) \right| &= \left| x_2 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_1| x_2}{|x_1| + |x_2|} \right| \leq (|x_1| + |x_2|) |\ln(|x_1| + |x_2|)| + |x_2|, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) \right| &= \left| x_1 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_2| x_1}{|x_1| + |x_2|} \right| \leq (|x_1| + |x_2|) |\ln(|x_1| + |x_2|)| + |x_1|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} t \ln t = 0$ on en conclut que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.

Par le théorème de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = f'(\|\mathbf{x}\|) \cdot \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Ainsi

$$\nabla F(\mathbf{x}) = f'\left(\|\mathbf{x}\|\right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \qquad \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3^3\right) - 1}{x_1}, & \text{si } x_1 \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Calculons le gradient de f au point $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0,0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{\cos(|t|) - 1}{t^2} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{\cos(t) - 1}{t^2} \overset{\text{Hospital}}{=} -\lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin(t)}{2t} = -\frac{1}{2}, \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0,0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(0,t,0) - f(0,0,0)}{t} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x_3}(0,0,0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(0,0,t) - f(0,0,0)}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\nabla f(0,0,0) = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1^2 \operatorname{th}\left(\dfrac{x_2 + x_3^2}{x_1}\right), & \text{si } x_1 \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

En rappelant que la tangente hyperbolique est comprise entre -1 et 1, le gradient de f au point $(0, 1, 1)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,1) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(t,1,1) - f(0,1,1)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} t \operatorname{th}\left(\frac{2}{t}\right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,1) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(0,1+t,1) - f(0,1,1)}{t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,1) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(0,1,1+t) - f(0,1,1)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\nabla f(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction donnée de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norme euclidienne unité, montrons que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration : Le gradient de f au point $\mathbf{x}$ est donné par le vecteur

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right).$$

Pour tout $t \neq 0$, on considère le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + t\mathbf{v}]$ et par le théorème des accroissements finis, il existe $s = s(t) \in]0, 1[$ tel que $\mathbf{z} := \mathbf{x} + st\mathbf{v}$ vérifie

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot t\mathbf{v}.$$

Ainsi

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x} + st\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall t \neq 0.$$

Puisque $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} (\mathbf{x} + st\mathbf{v}) = \mathbf{x}$, on a $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \nabla f(\mathbf{x} + st\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x})$ et donc

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_2 \sin y_3, \qquad g_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 \sin y_2 \sin y_3, \qquad g_3(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_3.$$

1°) On vérifie facilement que si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors on a

$$F(\mathbf{y}) = g_1(\mathbf{y})^2 + g_2(\mathbf{y})^2 + g_3(\mathbf{y})^2 = y_1^2.$$

2°) Pour tout $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, on a donc

$$\nabla F(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{a}),\ \frac{\partial F}{\partial y_2}(\mathbf{a}),\ \frac{\partial F}{\partial y_3}(\mathbf{a}) \right) = (2a_1, 0, 0).$$

3°) On a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 2x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = 2x_3$ et donc

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3).$$

D'autre part

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) = \cos y_2 \sin y_3; & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}) = -y_1 \sin y_2 \sin y_3; & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_3}(\mathbf{y}) = y_1 \cos y_2 \cos y_3; \\
\dfrac{\partial g_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}) = \sin y_2 \sin y_3; & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}) = y_1 \cos y_2 \sin y_3; & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_3}(\mathbf{y}) = y_1 \sin y_2 \cos y_3; \\
\dfrac{\partial g_3}{\partial y_1}(\mathbf{y}) = \cos y_3; & \dfrac{\partial g_3}{\partial y_2}(\mathbf{y}) = 0; & \dfrac{\partial g_3}{\partial y_3}(\mathbf{y}) = -y_1 \sin y_3.
\end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(\mathbf{g}(\mathbf{y})\Big) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(\mathbf{y}) &= 2g_1(\mathbf{y}) \cos y_2 \sin y_3 + 2g_2(\mathbf{y}) \sin y_2 \sin y_3 + 2g_3(\mathbf{y}) \cos y_3 \\
&= 2y_1 \cos^2 y_2 \sin^2 y_3 + 2y_1 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 + 2y_1 \cos^2 y_3 \\
&= 2y_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}) \ ; \\
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(\mathbf{g}(\mathbf{y})\Big) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_2}(\mathbf{y}) &= 2g_1(\mathbf{y})(-y_1 \sin y_2 \sin y_3) + 2g_2(\mathbf{y}) y_1 \cos y_2 \sin y_3 + 2g_3(\mathbf{y}) \cdot 0 \\
&= 2(y_1 \cos y_2 \sin y_3)(-y_1 \sin y_2 \sin y_3) + 2(y_1 \sin y_2 \sin y_3)(y_1 \cos y_2 \sin y_3) \\
&= 0 = \frac{\partial F}{\partial y_2}(\mathbf{y}) \ ; \\
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(\mathbf{g}(\mathbf{y})\Big) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_3}(\mathbf{y}) &= 2g_1(\mathbf{y}) y_1 \cos y_2 \cos y_3 + 2g_2(\mathbf{y}) y_1 \sin y_2 \cos y_3 + 2g_3(\mathbf{y})(-y_1 \sin y_3) \\
&= 2(y_1 \cos y_2 \sin y_3)(y_1 \cos y_2 \cos y_3) + 2(y_1 \sin y_2 \sin y_3)(y_1 \sin y_2 \cos y_3) \\
&\quad -2y_1 \cos y_3 (y_1 \sin y_3) \\
&= 0 = \frac{\partial F}{\partial y_3}(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$