EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-120

Solutions série 1

Solution 2. Soit $g \in G$, $x, \in X$, on montre que $\varphi^{-1}(gx) = g\varphi^{-1}(x)$
On a que $gx = gx \Leftrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(gx)) = g\varphi(\varphi^{-1}(x))$. Or comme φ est un morphisme de G-ensembles, $g\varphi(\varphi^{-1}(x)) = \varphi(g\varphi^{-1}(x))$ et donc on a

$$\varphi(\varphi^{-1}(gx)) = \varphi(g\varphi^{-1}(x))$$

Et donc on conclut en appliquant φ^{-1} des deux cotes. $\square$

Solution 3. On definit une structure de G-ensembles sur G/G_x comme suit :
Pour $g \in G$, $g'G_x \in G/G_x$, on defnit $g * g'G_x = gg'G_x$ (verifier que cela definit bien une action a gauche !)
On montre que l'application du cours, definie par

$$\phi : G/G_x \to G.x \text{ avec } gG_x \mapsto gx$$

est un morphisme de G-ensembles :
Le fait qu'elle soit bien definie a deja ete montre en cours, on ne montre donc que l'aspect morphisme : Soit $g \in G$, $g'G_x \in G/G_x$, on a

$$\phi(g * g'G_x) = \phi(gg'G_x) = gg'x = g\phi(g'G_x)$$

Ainsi on a bien un morphisme de G-ensembles. $\square$

Solution 5. On va prouver des deux manieres differentes :

1. Par le theoreme 1.8 (ie l'exercice 4) :
   Soit $\pi : G \to G/H$ la projection usuelle, alors $ker(\pi) = H$ et donc en utilisant l'exercice 4 (avec $K \subset H = ker(\pi)$), il existe un morphisme de groupes $\bar{\pi} : G/K \to G/H$ tel que
   $$\bar{\pi}(gK) = \pi(g) = gH$$
   (on connait les valeurs de $\bar{\pi}$ en resolvant l'exercice 4) Finalement, ce morphisme est clairement surjection (un certain $gH \in G/H$ est l'image par $\bar{\pi}$ de gK)
2. Maintenant on y va de brute force :
   Soit $\phi : G/K \to G/H$ donne par $\phi(gK) = gH$ On verifie que cette application est bien definie et que c'est un morphisme de groupes (l'aspect surjectif a deja ete montre avant)
   Supposons que $gK = g'K$, alors on a $g^{-1}g' \in K$ et donc $g^{-1}g' \in H$ ce qui implique que $gH = g'H$. Cette application ets donc bien definie. L'aspect morphisme de groupes vient naturellement des operations sur G/H et G/K. $\square$

Solution 6. 1. Notons que pour tout $g, h \in G$, on a

$$gh = [g, h]hg$$

Ainsi, les equivalences sont claires.

2. Rappelons que $Z(G) = ker(ad)$ Ansi on a

$$(g \in ker(ad)) \Leftrightarrow (ad(g) = id) \Leftrightarrow (ghg^{-1} = h \ \forall h) \Leftrightarrow (gh = hg \ \forall h) \Leftrightarrow ([g, h] = e_G \ \forall h)$$

3. Soit $xZ(G)$ un generateur de $G/Z(G)$ et soient $g, h \in G$, on montre que $gh = hg$:
Par definition, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tq $gZ(G) = x^a Z(G)$ et $hZ(G) = x^b Z(G)$ et donc il existe $z_1, z_2 \in Z(G)$ tq

$$g = x^a z_1 \text{ et } h = x^b z_2$$

On a alors que

$$gh = x^a z_1 x^b z_2 = x^a x^b z_1 z_2 = x^b x^a z_2 z_1 = x^b z_2 x^a z_1 = hg$$

Ainsi G est abelien

4. Pour montrer que $D(G) \lhd G$, on montre que le conjugue d'un commutateur reste un commutateur. Ainsi, comme $D(G)$ est engendre par les commutateurs, on aura gagne (pourquoi ?). En fait, pour n'importe quel endomorphisme ϕ de G, on voit que $\phi([g, h]) = [\phi(g), \phi(h)]$. Ainsi, pour $x \in G$,

$$x[g, h]x^{-1} = ad(x)([g, h)] = [ad(x)(g), ad(x)(h)] = [xgx^{-1}, xhx^{-1}]$$

Ainsi, $D(G)$ est bien normal (en fait on remarque que par l'argument d'avant, il est fixe par tout automorphisme, un tel sous-groupe est appele un groupe caracteristique)
On montre que $G/D(G)$ est abelien :
Soient $gD(G), hD(G) \in G/D(G)$, on a que

$$[gD(G), hD(G)] = [g, h]D(G) = D(G) = e_{G/D(G)}$$

et donc

$$(gD(G))(hD(G)) = (hD(G))(gD(G))$$

Ainsi $G/D(G)$ est abelien

5. — Supposons que K est distingue et que G/K est abelien. On a alors que pour tout $g, h \in G$, $ghK = hgK$.On a donc que $ghg^{-1}h^{-1} \in K$, c'est a dire $[g, h] \in K$. Ainsi, K contient tous les commutateurs et donc il contient $D(G)$

— Supposons maintenant que K contienne $D(G)$, on montre que $K \lhd G$:
Soit $g \in G$, $h \in K$, alors

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} = [g, h]h$$

Or, comme K contient tous les commutateurs et que c'est un sous-groupe, on a que $ghg^{-1} \in K$ et donc K est distingue. Enfin, comme $D(G)$ est inclus dans K, on a par l'exercice 4 un morphisme surjectif de $G/D(G)$ dans G/K et donc par le theoreme noyau-image, G/K est isomorphe a un quotient de $G/D(G)$ qui est un groupe abelien. Ainsi G/K est abelien $\square$

Solution 8. 1. On voit que la condition $g(\overline{0})g(\overline{1})...g(\overline{p-1}) = e_G$ est equivalente a $g(\overline{0}) = (g(\overline{1})...g(\overline{p-1}))^{-1}$
Nous avons donc $|G|$ choix pour $g(\overline{n})$ si $n \neq 0$ est 1 choix si $n = 0$ (l'inverse du reste). Ainsi on a $|G|$ choix pour $p-1$ elements et 1 seul pour le dernier, donc la cardinalite de cet ensemble de fonctions est $|G|^{p-1}$

2. On definit l'action suivante : soient $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$, alors on pose

$$(\overline{n} * f)(\overline{m}) = f(\overline{n} + \overline{m})$$

On verifie que cela definit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$. Cette action est a gauche et a droite car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est commutatif.

3. On $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$, on a, par le theoreme orbite stabilisateur, que $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/Stab_G(f)| = |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * f|$ et donc que

$$p = |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = |Stab_G(f)||\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * f|$$

Ainsi, $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * f|$ divise p et donc, comme p est premier, cette orbite est de taille 1 ou p. Comme tout orbite peut s'ecrire ainsi, on a gagne.

4. Supposons que $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * f| = 1$, alors forcement $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * f = \{f\}$. Ainsi, $\overline{n} * f = f$ pour tout $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a donc que $f(\overline{0}) = f(\overline{n})$ pour tout $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc f est constante. Posons $g = f(\overline{0})$. Par defintion de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0$, on obtient $g^p = e_G$.

5. On a par exemple l'orbite de la fonction constante envoyant tout sur e_G

6. On a, par la formule des classes, que

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)_0 = \sum_{\mathcal{O} \text{ orbite}} |\mathcal{O}| = \sum_{\mathcal{O} \text{ orbite de taille 1}} |\mathcal{O}| + \sum_{\mathcal{O} \text{ orbite de taille p}} |\mathcal{O}|$$

Ainsi on a donc

$$|G|^{p-1} = |\{\text{Orbites de taille 1}\}| + p|\{\text{Orbites de taille p}\}|$$

et donc

$$|\{\text{Orbites de taille 1}\}| = |G|^{p-1} - p|\{\text{Orbites de taille p}\}|$$

Or, comme p divise $|G|$, p divise aussi $|G|^{p-1}$ et donc p divise le nombre d'orbites de taille 1

7. Ainsi, comme $p \geqslant 2$ et qu'il n'y a pas 0 orbite de taille 1 (cf question 5), on a qu'il y a au moins 2 telles orbites et donc au moins une de ces orbites est une fonction constante donc l'image n'est pas e_G. Soit g son image. Alors $g^p = e_G$ et donc l'ordre de g divise p. Or comme $g \neq e_G$, l'ordre de g est donc p. $\square$