EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-125

Série 1: Correction Exos 7, 9

Exercice 7. Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et G le groupe fini d'ordre p et d'élément neutre noté e_G.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de cardinal $a \geqslant 1$, on note

$$\mathcal{F}(G, \mathcal{A}) = \{f : g \in G \mapsto f(g) \in \mathcal{A}\}$$

l'ensemble des fonctions de G à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Pour tout $h \in G$ et toute fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ on définit la fonction $h \star f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ par

$$h.f : g \mapsto (h \star f)(g) := f(g.h).$$

1. Montrer que $(h, f) \mapsto h \star f$ définit une action à gauche de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
2. Montrer que si $h \in G$ n'est pas l'élément neutre alors h est d'ordre p et qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$, qui est invariante sous l'action de h (ie. telle que $h \star f = f$) est constante.
3. En déduire le nombres d'orbites de l'action de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
4. En déduire le *petit Théorème de Fermat* : soit $p \geqslant 2$ premier, pour tout entier $a \geqslant 1$, $a^p - a$ est divisible par p.

Preuve:

1. Il suffit de verifier que

$$e_G \star f = f,\ (h.h') \star f = h \star (h' \star f).$$

On a pour tout $g \in G$,

$$e_G \star f(g) = f(g.e_G) = f(g)$$

$$(h.h') \star f(g) = f(g, h, h'),\ h \star (h' \star f)(g) = (h' \star f)(g.h) = f((g.h).h') = f(g.h.h').$$

2. Soit $h \neq e_G$. comme G est d'ordre p premier, par Lagrange h est d'ordre 1 ou p mais h n'est pas d'ordre 1 (sinon ce serait e_G) donc h est d'ordre p. En particulier
$$G = \{h^0 = e_G, h^1 = h, h^2, \cdots h^{p-1}\}.$$
Supposons que $h \star f = f$, alors
$$h^2.f = h \star f = f, \cdots, h^{p-1} \star f = f$$
et donc prenant $g = e_G$ on obtient
$$f(e_G) = f(e_G.h) = f(h) = f(e_G.h^2) = f(h^2) = \cdots = f(e_G.h^{p-1}) = f(h^{p-1})$$
et donc $f(h')$ vaut $f(e_G)$ pour tout $h' \in G$.
3. On utilise la formule de Burnside :
$$|G\backslash \mathcal{F}(G,\mathcal{A})| = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} |\mathcal{F}(G,\mathcal{A})^h|.$$
Si $h = e_G$ tout element est un point fixe et $|\mathcal{F}(G,\mathcal{A})^{e_G}| = |\mathcal{F}(G,\mathcal{A})| = a^p$. Si $h \neq e_G$ alors si f est un point fixe alors on a vu que f est une fonction constante et evidemment tout fonction constante est fixe sous l'action de h donc $|\mathcal{F}(G,\mathcal{A})^h| = a$. On a donc
$$|G\backslash \mathcal{F}(G,\mathcal{A})| = \frac{1}{p}(a^p + (p-1)a) = \frac{1}{p}(a^p - a) + a$$
4. Comme $|G\backslash \mathcal{F}(G,\mathcal{A})|$ et a sont entiers, $\frac{1}{p}(a^p - a)$ doit etre entier.

$\square$

Exercice 9 (Proprietes abstraites des domaines fondamentaux)**.** Soit $G \curvearrowright X$ un G-ensemble. On rappelle qu'un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset X$ est un sous-ensemble tel que l'application, "orbite" restreinte a $\mathcal{D}$
$$x \in \mathcal{D} \mapsto G.x \in G\backslash X$$
entre $\mathcal{D}$ et l'ensemble des orbites $G\backslash X$ est bijective.

Etant donne $\mathcal{O}$ une orbite l'element x correspondant a $\mathcal{O}$ par la bijection ci-dessus est appele "representant" de l'orbite $\mathcal{O}$ (qui n'est autre que $G.x$) et $\mathcal{D}$ est aussi appele ensemble de representant.

Aux notations pres on a la meme definition pour les action a droites.

1. Soient X, Y des G-ensembles et $\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_y$ les domaines fondamentaux associes.

(a) Montrer qu'il y a une bijection entre $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X,Y)$ et le sous-ensemble de l'ensemble des applications de D_X vers Y defini par :

$$\{\varphi : \mathcal{D}_X \to Y,\ \forall x \in \mathcal{D}_X,\ G_x \subset G_{\varphi(x)}\} \subset \mathrm{Hom}_{ens}(D_X, Y)$$

(G_x et $G_{\varphi(x)}$ designent les stabilisateurs de x et $\varphi(x)$ dans G).

(b) Que ce passe-t-il si G agit trivialement sur Y ?

(c) On supppose que tous les stabilisateurs G_y des elements $y \in Y$ sont triviaux. Montrer que $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X,Y)$ est non-vide ssi tous les stabilisateurs G_x des elements $x \in X$ sont triviaux et qu'alors $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X,Y)$ est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{ens}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y) \times \mathrm{Hom}_{ens}(\mathcal{D}_X, G)$.

2. Montrer que si $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental alors pour tout $g \in G$, le transforme de $\mathcal{D}$ par g $g.\mathcal{D} = \{g.x,\ x \in \mathcal{D}\}$ est un domaine fondamental.

3. Montrer que si $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental alors pour tout $g \in G$ on a

$$\mathcal{D} \cap g.\mathcal{D} = X^g \cap \mathcal{D}$$

(X^g l'ensemble des points fixes de g dans X). Que se passe-t-il dans le cas du groupe des rotations lineaires $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}^2$. puis sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

4. Montrer que $X = \bigcup_{g \in G} g.\mathcal{D}$.

5. Soit

$$G_{\mathcal{D}} = \{g \in G,\ g.\mathcal{D} = \mathcal{D}\}$$

le stabilizateur global de l'ensemble $\mathcal{D}$ et soit $\{g_i,\ i \in G/G_{\mathcal{D}}\}$ un ensemble de representants des classes (a droites) $G \curvearrowleft G_{\mathcal{D}}$ (autrement dit un domaine fondamental pour l'action par multiplication a droite de $G_{\mathcal{D}}$ sur G). Montrer que

$$X = \bigcup_{i \in G/G_{\mathcal{D}}} g_i.\mathcal{D}.$$

6. Soit H un sous-groupe de G alors H agit sur X par restriction de l'action de G ; de meme H agit sur G par multiplication par la droite. Soit $\{g_i,\ i \in G/H\}$ un ensemble de representants des classes (a droites) de $G \curvearrowleft H$.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental de $G \curvearrowright X$

(a) Montrer que

$$\mathcal{D}_H := \bigcup_{g_i,\ i \in G/H} g_i^{-1}.\mathcal{D}$$

intersecte toute H-orbite de X.

(b) On suppose que G agit sur X sans points fixes : $\forall g \in G - \{e_G\},\ X^g = \emptyset$. Montrer qu'alors $\mathcal{D}_H$ est un domaine fondamental de $H \curvearrowright X$.

7. On suppose que $X = \mathbb{R}^2$ et que $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe d'isometries. On suppose egalement que le domaine fondamental $\mathcal{D}$ contient une boule

$$B = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x - x_0| < r\}$$

pour $r > 0$. Montrer qu'alors on est dans l'un des deux cas suivants

$$g.B \cap B = \emptyset$$
$$g.B \cap B = B$$

Que dire sur g dans ce dernier cas ?

Preuve:

Let G be a group and X be a set with a left G action $G \curvearrowright X$. Recall that a fundamental domain $\mathcal{D}_X$ is a subset of X s.t. the canonical map $X \to G\backslash X$ (defined by $x \mapsto G.x$) restricted to $\mathcal{D}_X$ is a bijection onto $G\backslash X$. In other words, $\mathcal{D}_X$ is a set of representatives of $G\backslash X$. More concretely $\forall\ x \in X$, there exists unique (depending only on the orbit of x) $y \in \mathcal{D}_X$ s.t. $y = gx$ for some $g \in G$.

Question 1

Part (a)

Let X and Y be G-sets (w.r.t. a left action of G). Let

$$S := \{\varphi : \mathcal{D}_X \to Y,\ \forall x \in \mathcal{D}_X,\ G_x \subseteq G_{\varphi(x)}\} \subseteq \mathrm{Hom}_{sets}(D_X, Y)$$

(G_x and $G_{\varphi(x)}$ are the stabilizers of x and $\varphi(x)$ in G).

To show : The sets $\mathrm{Hom}_{G-sets}(X, Y)$ and S are in bijection.

Proof
First observe that if $f \in \mathrm{Hom}_{G-sets}(X, Y)$ then $G_x \subseteq G_{f(x)}\ \forall\ x \in X$.

Define $\Psi : \mathrm{Hom}_{G-sets}(X, Y) \to S$ by $\Psi(f) := f|_{\mathcal{D}_X}\ \forall\ f \in \mathrm{Hom}_{G-sets}(X, Y)$. Note that $\Psi(f) \in S$ by the above observation.

Define $\Phi : S \to \text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$ by $\forall\ \phi \in S$, $\forall\ x \in X$ $\Phi(\phi)(x) := g^{-1}\phi(gx)$ where $gx \in \mathcal{D}_X$. $\Phi(\phi)(x)$ is well defined since if $h \in G$ is another element s.t. $hx \in \mathcal{D}_X$, $h = k.g$ for $k \in G_{gx}$ and therefore k and hence k^{-1} is in $G_{\phi(gx)}$. It is clear that $\Psi \circ \Phi = id_S$, since $x \in \mathcal{D}_X$, $e_G x \in \mathcal{D}_X$.

We compute for $x \in X$, $f \in \text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$, $\Phi \circ \Psi(f)(x) = g^{-1}(f(g.x)) = g^{-1}.gf(x) = f(x)$ where $g \in G$ s.t. $gx \in \mathcal{D}_X$. Therefore Ψ and Φ are mutual inverses. $\square$

Part (b)

Now we assume G acts trivially on Y i.e. $G_y = G\ \forall\ y \in Y$. In this case one sees that $S = \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, Y)$. So there is a bijection between $\text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$ and $\text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, Y)$. This can also be verified directly since any element of $\text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$ is a constant on the orbits of X and these constants can be chosen arbitrarily.

Part (c)

Now suppose that G acts freely on Y i.e. $G_y = \{e_G\}\ \forall\ y \in Y$. From our first observation in part(a) if $\text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$ is non-empty, the action of G on X is also free.

The reader can easily check that the action of G on Y is free iff the map $\mathcal{D}_Y \times G \to Y$ defined by $(y,g) \mapsto g.y$ is a bijection. (note that this map is always a surjection)

Let us assume $\text{Hom}_{G-sets}(X,Y)$ is non-empty. In that case G_x is trivial for all $x \in X$ and so $S = \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, Y)$. We have the following conclusion using part(a) and above :

$$\text{Hom}_{G-sets}(X,Y) \simeq \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, Y) \simeq \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y \times G)$$

We have the following unique isomorphism from the definition of the product of sets and the result follows.

$$\text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y \times G) \cong \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y) \times \text{Hom}_{sets}(\mathcal{D}_X, G)$$

$\square$

Question 2

This follows from the observation that for all $x \in X$ and $g \in G$, orbit of x is the same as the orbit of gx.

Question 3

Let $\mathcal{D}$ be a fundamental domain. We leave it to the reader to see that for any $g \in G$, $X^g \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \cap g\mathcal{D}$.

Assume $y \in \mathcal{D} \cap g\mathcal{D}$ i.e. $y = gx$ for some $x \in \mathcal{D}$. So the orbits of x and y are the same $G.y = G.x$, which shows $x = y$ using the definition of a fundamental domain. We have $y = gy$ and so $y \in X^g \cap \mathcal{D}$.

For the action of $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}^2$ any ray starting at the origin (and including the origin) serves as a fundamental domain $\mathcal{D}$. If $g \neq Id \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $X^g \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} \cap g\mathcal{D} = \{0\}$ and if $g = Id$, $X^g \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} \cap g\mathcal{D} = \mathcal{D}$.

For the action of $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ any ray starting at the origin and excluding the origin serves as a fundamental domain $\mathcal{D}$. If $g \neq Id \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $X^g \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} \cap g\mathcal{D} = \varnothing$ and if $g = Id$, $X^g \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} \cap g\mathcal{D} = \mathcal{D}$. $\square$

Question 4

Left to the reader. Look at explanation above question 1.

Question 5

Let $\{g_i | i \in G\backslash G_{\mathcal{D}}\}$ be the set of representatives for the action $G \curvearrowleft G_{\mathcal{D}}$ (by right multiplication) as in the question. Let $x \in X$, by question 4, there exists $y \in \mathcal{D}$ and $g \in G$ s.t. $x = gy = (g_i h)y$ for some $h \in G_{\mathcal{D}}$ and g_i in the above defined set. But $(g_i h)y = g_i(hy) = g_i y$ from which the result follows. $\square$

Question 6

Let H be a subgroup and $\{g_i | i \in G\backslash H\}$ be the set of representatives for the action $G \curvearrowleft H$ (by right multiplication) as in the question.

Part (a)

Let $x \in X$, by question 4, there exists $y \in \mathcal{D}$ and $g \in G$ s.t. $x = gy$ and $g^{-1} = g_i h$ for some $h \in H$ and g_i in the above defined set. We get $x = h^{-1} g_i^{-1} y$, the orbit of x is same as that of $g_i^{-1} y$ under the action of H on X. Since x was arbitrary the result follows. $\square$

Note that we have shown that the canonical map $X \to H\backslash X$ (defined by $x \mapsto H.x$) restricted to $\mathcal{D}_H$ is a surjection onto $H\backslash X$.

Part (b)

Assume now that G acts freely on X. By our discussion in question 1(c), the g that appears in the above argument is unique (given x) and the result then follows. The details are left to the reader.

Question 7

Let $X = \mathbb{R}^2$ and G is a subgroup of isometries of $\mathbb{R}^2$ acting on X. Let $\mathcal{D}$ be a fundamental domain for this action and $B \subseteq \mathcal{D}$ is a disc as in the question. Let $g \in G$. Assume further that $gB \cap B \neq \varnothing$.

Let $x \in gB \cap B$, there is $r' > 0$ s.t. the disc $B' := B(x, r') \subseteq gB \cap B$. (One may use $gB \cap B$ is open to see this, or use gB is also a disc.) Since $B' \subseteq B \subseteq \mathcal{D}$, using question 3 conclude that g fixes B' pointwise i.e. $B' \subseteq X^g$. Now if we fix coordinates for X taking x as the origin, then $g \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Let us denote the matrix of g obtained by fixing some basis of $\mathbb{R}^2$ as A. The coordinates of the fixed points v of g are given by the linear equation $(A - I)v = 0$ and the solutions form a linear subspace of $\mathbb{R}^2$. Since we know that the subspace of solutions contains a disc, we conclude that $A = I$ (g is the identity). In particular $gB = B$ and $gB \cap B = B$. $\square$