Série 8

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1.
Soit le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Représenter graphiquement D et calculer $\iiint_D xyz\, dxdydz$.

Devoir 2.
Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ et $f(x, y) = x + y$. Donner une paramétrisation du bord Γ de D, parcouru dans le sens trigonométrique, puis calculer

$$\int_\Gamma f\, d\gamma.$$

Devoir 3.

Vérifier par le calcul les deux formules de Green-Riemann pour le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$$

dont le bord est parcouru dans le sens trigonométrique, et la fonction $f(x, y) = x^2 y$.

A faire PENDANT et APRES le cours :

Exercice 1. On considère l'arc lisse Γ paramétré par :

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Si $\mathbf{v}$ est le champ vectoriel donné par :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2, z, x),$$

calculer les quantités suivantes :

$$\int_\Gamma d\gamma, \quad \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Exercice 2. On définit le champ scalaire f et le champ vectoriel $\mathbf{v}$ par les relations suivantes :

$$f(x,y,z) = x^2 + z + yz,$$
$$\mathbf{v}(x,y,z) = (x^2, yz, z).$$

Si Γ est l'arc lisse formé du segment de droite d'origine $P = (1,2,3)$ et d'extrémité $Q = (5,2,0)$, calculer les quantités suivantes :

$$\int_\Gamma d\gamma, \quad \int_\Gamma f\, d\gamma, \quad \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'arc lisse

$$\Gamma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z = x + y\}$$

et le champ vectoriel $\mathbf{u}(x,y,z) = (x+y, 2z, xy)$. Donner une paramétrisation $\mathbf{r}$ de Γ et, en notant $\boldsymbol{\tau}$ la tangente unité à Γ (orientée dans le sens de parcours de $\mathbf{r}$), calculer

$$\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\ d\gamma.$$

Exercice 4. Vérifier par le calcul les formules de Green-Riemann pour le domaine D défini par le triangle de sommets $(0,0)$, $(2,1)$ et $(1,2)$ (dont le bord est parcouru dans le sens trigonométrique), et la fonction $f(x,y) = xy$.

Exercice 5.

Si $\mathbb{R}^3$ est repéré par le système de coordonnées cartésien $Oxyz$, on définit alors $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = x^2 + yz$. Calculer alors le minimum et le maximum de f sous la condition $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, c'est-à- dire

$$\min_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z)$$

où S est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ centrée en zéro.

Exercice 6.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide convexe et soit $f \in C^1(E)$. Si $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{y}$, démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$, qu'il existe $\vec{z} \in E$, $\vec{z} \neq \vec{x}, \vec{z} \neq \vec{y}$ tel que

$$f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + \vec{\nabla} f(\vec{z}) \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

où $\cdot$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{\nabla}$ est le gradient.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} e^{x^2+y^2+z^2+t^2} dt$.

Montrer que $\vec{\nabla} f(1, 1, 1)$ est orthogonal au vecteur $(1, 1, 1)$.