Corrigé 5

Exercice 1.

On considère la $n \times n$ matrice A de coefficients $(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définis par

$$\begin{cases} A_{ij} = 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ A_{ij} = -1 & \text{si } |i-j| = 1, \\ A_{ij} = 2 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} = \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}x_p x_q - \sum_{p=1}^{n} b_p x_p.$$

Montrons que f prend son minimum en $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Commençons par montrer que A est symétrique définie positive. Explicitons la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & -1 & 2 & -1 \\ & & & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i(x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) + x_n^2 \\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i(x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + x_n^2 \\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2
\end{aligned}$$

ce qui prouve que A est définie positive.

On a immédiatement, A étant symétrique, que $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \sum_{p,q=1}^{n} \frac{1}{2} A_{pq} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_p x_q) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_p x_p) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \frac{1}{2} A_{pq}(\delta_{iq} x_p + \delta_{ip} x_q) - \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip} b_p \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} A_{pi} x_p + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n} A_{iq} x_q - b_i = \frac{1}{2}(A\mathbf{x})_i + \frac{1}{2}(A^T\mathbf{x})_i - b_i.
\end{aligned}$$

On en tire alors que le seul point stationnaire de f est donné par $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{b}$ (A est régulière puisque A est symétrique définie positive).

La matrice hessienne de f en tout point est A. En effet :

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_p x_q) = \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_p \frac{\partial}{\partial x_j} x_q + x_q \frac{\partial}{\partial x_j} x_p\Big) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_p \delta_{jq} + x_q \delta_{jp}\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\Big(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}\Big) = A_{ij} + A_{ji} = 2A_{ij}.
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor, on a $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T A(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ et donc $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2.

Soit $f : E =]-1, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = -1 + x^2 + yz^5 + \text{Arctg } xyz + \frac{1}{2}\ln(1 + x + z) - \ln 3 - \ln z + \frac{1}{3}\ln(y^2 + z^3).$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 5yz^4 + \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1 + x + z)} - \frac{1}{z} + \frac{z^2}{y^2 + z^3}.$$

Ainsi, puisque $f(1, 0, 7) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 7) = \frac{1}{18} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et une unique fonction continue $\phi : B((1, 0), \delta) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(1, 0) = 7 \qquad \text{et, pour tout } (x, y) \in B((1, 0), \delta) : f(x, y, \phi(x, y)) = 0.$$

De plus, pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1 + x + z)}, & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 7) &= 2 + \frac{1}{18}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= z^5 + \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{2y}{3(y^2 + z^3)}, & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 7) &= 7^5 + 7. \end{aligned}$$

Le plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$ correspond au plan tangent à la surface déterminée (localement) par l'équation $f(x, y, z) = 0$ au point $(1, 0, 7)$. Il est donc donné par :

$$\left\langle \nabla f(1, 0, 7), \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 7 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{37}{18}x + (7^5 + 7)y + \frac{1}{18}z - \frac{22}{9} = 0.$$

Remarquons que cette équation s'obtient aussi en égalant à zéro la partie principale (polynômiale) du développement de Taylor à l'ordre 1 de f au point $(1, 0, 7)$.

Exercice 3.

Posons $f_1(x, y, z) = x - y^3 + z + 8$ et $f_2(x, y, z) = x^3 + y^4 - z^5 - 16$. On a

$$f_1(0, 2, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(0, 2, 0) = 0.$$

Le but est d'exprimer y et z comme fonction de x ($y = \phi_1(x), z = \phi_2(x)$) pour avoir dans un voisinage de 0

$$f_1(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = f_2(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = 0.$$

En fait, si x est considéré comme un paramètre donné, on veut résoudre un système de 2 équations $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$ à 2 inconnues y et z. On a

$$D_{(y,z)}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y^2 & 1 \\ \\ 4y^3 & -5z^4 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\det\Big(D_{(y,z)}f(0,2,0)\Big) = \det\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} = -32 \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et deux fonctions de classe C^1

$$\phi_1 :]-\delta,+\delta[\to \mathbb{R}, \;\; \phi_2 :]-\delta,+\delta[\to \mathbb{R},$$

telles que

$$\begin{cases} f_1(x,\phi_1(x),\phi_2(x)) = f_2(x,\phi_1(x),\phi_2(x)) = 0, \quad \forall x \in]-\delta,\delta], \\ \\ \phi_1(0)=2, \quad \phi_2(0)=0, \end{cases}$$

On a donc bien

$$\begin{cases} x - \big(\phi_1(x)\big)^3 + \phi_2(x) + 8 &=& 0, \quad \forall x \in]-\delta,\delta[, \\ \\ x^3 + \big(\phi_1(x)\big)^4 - \big(\phi_2(x)\big)^5 - 16 &=& 0, \quad \forall x \in]-\delta,\delta[. \end{cases}$$

En dérivant ces deux relations et en posant $x=0$, on obtient :

$$\begin{cases} 1 - 3\big(\phi_1(0)\big)^2\phi_1'(0) + \phi_2'(0) &=& 0, \\ \\ 4\big(\phi_1(0)\big)^3\phi_1'(0) - 5\big(\phi_2(0)\big)^4\phi_2'(0) &=& 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 12\phi_1'(0) + \phi_2'(0) &=& 0, \\ \\ 32\phi_1'(0) &=& 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1'(0) &=& 0, \\ \\ \phi_2'(0) &=& -1. \end{cases}$$

La tangente à la courbe $y=\phi_1(x)$ en $x=0$ a pour équation $y=2$ et la tangente à la courbe $z=\phi_2(x)$ en $x=0$ a pour équation $z=-x$.

Exercice 4.

On vérifie aisément que $x=y=0$ et $u=v=1$ sont solutions des deux équations données.

On cherche à exprimer, au moyen du théorème des fonctions implicites, les variables u,v en fonction des variables x, y. Si $f_1(x,y;u,v) = x - u^2 + v^2$ et $f_2(x,y;u,v) = y - uv + 1$, on a $f_1(0,0;1,1) = 0$, $f_2(0,0;1,1) = 0$ et si

$$D_{(u,v)}f(x,y;u,v)$$

est la matrice jacobienne de $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))$ relative aux variables u, v, on a

$$D_{(u,v)}f(x,y;u,v) = \begin{bmatrix} -2u & 2v \\ -v & -u \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$D_{(u,v)}f(0,0;1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det\Big(D_{(u,v)}f(0,0;1,1)\Big) = 4 \neq 0.$$

Ainsi il existe $\delta > 0$ et deux fonctions

$$\varphi_1 : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2 : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R},$$

qui satisfont

$$\begin{cases} f_1(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)) = f_2(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)) = 0, \quad \forall (x,y) \in B\big((0,0),\delta\big), \\ \\ \varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 1, \end{cases}$$

Calculons $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y}(0,0)$, $j = 1,2$.
En dérivant $f_1(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))$ par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(\dots)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(\dots)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) = 0,$$

les $\dots$ étant mis pour $x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)$. Avec $(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)) = (0,0;\varphi_1(0,0) = 1, \varphi_2(0,0) = 1)$, on obtient

$$1 - 2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,0) + 2\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = 0. \tag{1}$$

En dérivant $f_2(x,y;\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))$ par rapport à x et en prenant $x = y = 0$, on obtient

$$0 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = 0. \tag{2}$$

Des équations (1) et (2), on obtient

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}, \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{4}.$$

En faisant des calculs analogues avec les dérivées par rapport à y, on obtient :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}, \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\vec{\nabla}\varphi_1(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla}\varphi_2(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T.$$

<u>Exercice 5.</u>

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2m}$$

où m est un entier strictement positif et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$.

a) $f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^m$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = m\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{m-1} 2x_k$ et donc $\nabla f(\mathbf{x}) = 2m\|\mathbf{x}\|^{2m-2}\,\mathbf{x}$.

b) Le développement de Taylor au premier ordre donne en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$:

$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$ si $\mathbf{x} \underset{\neq}{\to} \mathbf{a}$.

Ainsi

$$p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

où $\cdot$ est le produit scalaire, i.e.,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{a}\|^{2m} + 2m\|\mathbf{a}\|^{2m-2}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= \|\mathbf{a}\|^{2m} + 2m\|\mathbf{a}\|^{2m-2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - 2m\|\mathbf{a}\|^{2m} \\ &= (1 - 2m)\|\mathbf{a}\|^{2m} + 2m\|\mathbf{a}\|^{2m-2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$