

SÉRIE 3 : CORRIGÉ

Exercice 1

1. On veut montrer que l'intérieur de l'image est l'image de l'intérieur. Il y a plusieurs manières de faire, en raisonnant avec la conservation des distances on arrive rapidement au résultat. Ici, on donne une méthode utilisant le fait qu'une isométrie est une application affine (pour anticiper la question 5) on montre cela par double inclusion :

— $\varphi(\mathcal{P}^\circ) \subseteq \varphi(\mathcal{P})^\circ$: Soit $Q \in \varphi(\mathcal{P}^\circ)$ et P sa préimage par φ . Comme $P \in \mathcal{P}^\circ, \exists D(P, r) \subset \mathcal{P}$. On peut donc trouver trois points distincts de P et distincts entre eux $A, B, C \in D(P, r)$ tels que P est un barycentre de ces trois points : $\exists \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C > 0; \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1; P = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C$. Ainsi, comme φ préserve les barycentres (cf question 3), on déduit :

$$Q = \varphi(P) = \varphi(\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C) = \lambda_A \varphi(A) + \lambda_B \varphi(B) + \lambda_C \varphi(C).$$

Donc Q est un barycentre de $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$. Q se trouve donc à l'intérieur du simplexe $\overline{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)}$. Enfin, comme les facteurs λ sont conservés, Q n'est pas sur une arête du simplexe, et donc on peut trouver un $D(Q, r') \subset \overline{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} \subset \varphi(\mathcal{P})$. Donc $Q \in \varphi(\mathcal{P})^\circ$, on a notre inclusion. Pour résumer, on a pris une boule autour de P dans \mathcal{P} , puis un triangle centré en P dans cette boule. Ce triangle est envoyé sur un autre triangle contenant P dans $\varphi(\mathcal{P})$. Puis dans ce nouveau triangle on crée une nouvelle boule autour de $\varphi(P)$.

— $\varphi(\mathcal{P})^\circ \subseteq \varphi(\mathcal{P}^\circ)$: Le raisonnement est le même en invoquant la surjectivité de φ dans $\varphi(\mathcal{P})$

2. Par 1), l'image de l'intérieur est l'intérieur de l'image. Par définition, $\partial\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}} - \mathcal{P}^\circ$. Comme \mathcal{P} est fermé, $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. Ainsi :

$$\partial\varphi(\mathcal{P}) = \overline{\varphi(\mathcal{P})} - \varphi(\mathcal{P})^\circ = \varphi(\overline{\mathcal{P}}) - \varphi(\mathcal{P}^\circ) = \varphi(\mathcal{P}) - \varphi(\mathcal{P}^\circ) = \varphi(\mathcal{P} - \mathcal{P}^\circ) = \varphi(\partial\mathcal{P})$$

Remarque : L'égalité 1 vient de la bijectivité de φ et du fait que $\overline{\mathcal{P}} = (\mathbb{R}^2 - \mathcal{P})^\circ$, l'égalité 2 vient de la bijectivité de φ .

3. — Première méthode : On sait que φ est une isométrie, donc une application affine. Or, une application affine préserve les barycentres, i.e l'image d'un barycentre est un barycentre. Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{ABC}) &= \varphi(\{\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C, \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\}) \\ &= \{\lambda_A \varphi(A) + \lambda_B \varphi(B) + \lambda_C \varphi(C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\ &= \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \end{aligned}$$

— Deuxième méthode : On décompose φ comme la composée d'une isométrie linéaire φ_0 et d'une translation $t_{\vec{u}} : \varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$

Remarquons que si $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$, alors $\vec{u} = \vec{u} (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)$.

On déduit donc, en utilisant le fait que φ_0 est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{ABC}) &= \varphi(\{\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C, \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\}) \\ &= \{\varphi(\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\ &= \{t_{\vec{u}} \circ \varphi_0(\lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\ &= \{\vec{u} + \lambda_A \varphi_0(A) + \lambda_B \varphi_0(B) + \lambda_C \varphi_0(C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\ &= \{\vec{u} (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) + \lambda_A \varphi_0(A) + \lambda_B \varphi_0(B) + \lambda_C \varphi_0(C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\lambda_A(\varphi_0(A) + \vec{u}) + \lambda_B(\varphi_0(B) + \vec{u}) + \lambda_C(\varphi_0(C) + \vec{u}), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\
&= \{\lambda_A\varphi(A) + \lambda_B\varphi(B) + \lambda_C\varphi(C), \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1\} \\
&= \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)
\end{aligned}$$

4. — Par définition, un polygone plein \mathcal{P} est la réunion de simplexes dont l'intérieur est connexe par arcs, donc, en utilisant 3) :

$$\varphi(\mathcal{P}) = \varphi(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i B_i C_i}) = \bigcup_{i=1}^n \varphi(\overline{A_i B_i C_i}) = \bigcup_{i=1}^n \overline{\varphi(A_i)\varphi(B_i)\varphi(C_i)}$$

On déduit donc que l'image d'un polygone plein est une union de simplexes, il suffit maintenant de montrer que l'image d'un ensemble connexe par arcs est connexe par arcs et ce sera fini :

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble connexe par arcs. Considérons $\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{A})$ l'image de \mathcal{A} par φ . But : montrer que \mathcal{B} est connexe par arcs. Soient donc Q_1 et $Q_2 \in \mathcal{B}$. Soient P_1 et $P_2 \in \mathcal{A}$ leurs préimages respectives par φ .

Comme \mathcal{A} est connexe par arcs, $\exists f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$ continue telle que $f(0) = P_1$ et $f(1) = P_2$. Posons $g = \varphi \circ f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$. Alors g est continue comme composition de fonctions continues. De plus, $\forall \alpha \in [0, 1], g(\alpha) \in \mathcal{B}$ et $g(0) = Q_1, g(1) = Q_2$. Donc il existe une application continue de $[0, 1]$ dans \mathcal{B} reliant ces deux points, donc \mathcal{B} est connexe par arcs. On déduit donc que l'image d'un polygone plein est un polygone plein.

- Par 2), le bord de l'image est l'image du bord. Montrons que l'image d'une arête est une arête de l'image :

Considérons P et Q adjacents $\in \mathcal{P}$ et d l'arête les reliant, alors on peut écrire : $d = \{\alpha P + \beta Q, \alpha + \beta = 1; \alpha, \beta \geq 0\}$. Comme on l'a vu juste avant, φ préserve les barycentres, donc :

$$\varphi(d) = \varphi(\{\alpha P + \beta Q, \alpha + \beta = 1; \alpha, \beta \geq 0\}) = \{\alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q), \alpha + \beta = 1; \alpha, \beta \geq 0\} = [\varphi(P), \varphi(Q)] = \text{arête reliant } \varphi(P) \text{ à } \varphi(Q).$$

De plus, les sommets sont les intersections de deux arêtes, on voit donc aisément que l'image d'un sommet est bien un sommet.

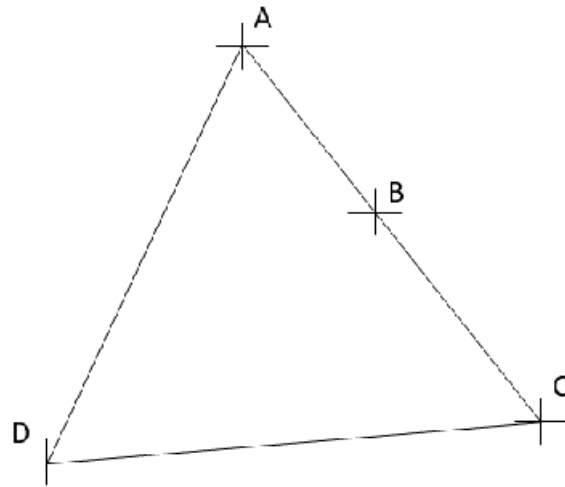
5. Le seul argument utilisé ici est que ces applications préservent les barycentres. Donc c'est vrai pour toute application affine. Un argument plus précis est que les applications affines bijectives sont des homéomorphismes entre espaces topologiques, donc les propriétés ci-dessus sont vérifiées.

Exercice 2

On va montrer ce résultat par récurrence sur le nombre de sommets du polygone considéré. Tout d'abord, on aura besoin de ce lemme :

Lemme 1. *Tout polygone \mathcal{P} à $n \geq 4$ sommets possède une diagonale, c'est à dire qu'il existe deux sommets P et Q non adjacents, tels que le segment $[P, Q]$ appartient au polygone \mathcal{P} .*

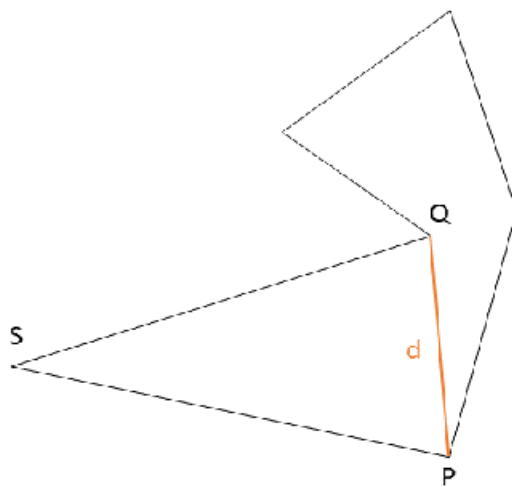
Important : Quand on parle de polygone à n sommets, on considère que 3 sommets adjacents ne sont pas alignés. Ainsi, le polygone ci-dessous est considéré comme ayant 3 sommets, et non 4 :



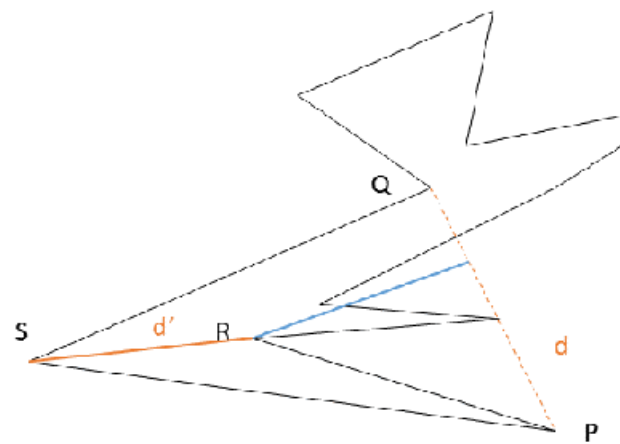
Polygone à 3 sommets

Preuve du lemme : Considérons donc \mathcal{P} un polygone à $n \geq 4$ sommets. Soit S le sommet de \mathcal{P} "le plus à gauche" et P et Q les sommets adjacents à S . Par hypothèse sur n , il reste au moins un sommet entre P et Q , donc $d = [P, Q]$ n'est pas une arête de \mathcal{P} . Etudions le triangle \mathcal{T} formé de P, S et Q . Il y a deux cas possibles :

- cas 1 : Il n'existe pas de sommet de \mathcal{P} dans \mathcal{T} , dans ce cas, d est une diagonale. En effet, toute arête coupant d devrait partir de S , mais alors P et Q ne seraient pas les sommets adjacents à S .
- cas 2 : Il existe au moins un sommet de \mathcal{P} à l'intérieur de \mathcal{T} , soit R le sommet à l'intérieur de \mathcal{T} maximisant la distance à d . Alors $d' = [S, R]$ est une diagonale. En effet, toute arête coupant d' et ne passant pas par S devrait avoir pour sommet un point dans \mathcal{T} dont la distance à d serait supérieur à celle de R à d .



Premier cas



Deuxième cas

Preuve de l'énoncé : Par récurrence sur n :

- Initialisation : Pour $n = 3$, \mathcal{P} est déjà triangulé : il n'y a rien à faire.
- Hérité : Supposons que tout polygone avec un nombre de sommets $< n$ est triangulable. Soit \mathcal{P} un polygone à n sommets. Par le lemme, il existe une diagonale dans \mathcal{P} , or cette diagonale divise \mathcal{P} en deux polygones P_1 et P_2 ayant chacun au maximum $n-1$ sommets (il y a toujours au moins un sommet "de l'autre côté de la diagonale"). Par hypothèse de récurrence, chacun de ces polygones est triangulable. Comme d est une arête commune à P_1 et P_2 , c'est une arête commune à deux triangles, et donc $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2$ est l'union des deux triangulations, donc \mathcal{P} est triangulable aussi.
- Conclusion : L'hypothèse est vérifiée au rang initial 3 et héréditaire à partir de ce rang, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Posons :

$$n = n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = a(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/y} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$g := n.a = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & \sqrt{1/y} \end{pmatrix}$$

Et $g.i = \frac{\sqrt{y}i + x/\sqrt{y}}{\sqrt{1/y}} = x + iy = z$ Donc $\forall z \in \mathbb{C}, z \in G.i \iff$ Une seule orbite, donc action transitive.

2. Soit

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Alors $g.i = i \iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \iff ai + b = di - c \iff a = d, b = -c \iff g \in K$. Par le théorème orbite-stabilisateur, on a une bijection entre $SL_2(\mathbb{R})/K$ et l'orbite de i , donc \mathbb{H} par 1).

3. On vérifie juste les critères de sous-groupe.

Pour les isomorphismes, on pose :

$$\varphi_1 : N \rightarrow (\mathbb{R}, +), n(x) \rightarrow x$$

$$\varphi_2 : A \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, *), a(y) \rightarrow y$$

Et on vérifie facilement que ce sont bien des isomorphismes.

4. Montrons que $N.A = \{n.a, n \in N, a \in A\}$ est un sous groupe de $SL_2(\mathbb{R})$:

Soit, pour $i=1,2$:

$$n_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

$$a_i = \begin{pmatrix} \sqrt{y_i} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/y_i} \end{pmatrix} \in A$$

Alors, comme ci-dessus,

$$n_i \cdot a_i = \begin{pmatrix} \sqrt{y_i} & x_i/\sqrt{y_i} \\ 0 & \sqrt{1/y_i} \end{pmatrix} \in N.A$$

Et donc :

$$\begin{aligned} (n_1 \cdot a_1) \cdot (n_2 \cdot a_2) &= \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & x_1/\sqrt{y_1} \\ 0 & \sqrt{1/y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y_2} & x_2/\sqrt{y_2} \\ 0 & \sqrt{1/y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1 y_2} & \frac{(x_2 y_1 + x_1)}{\sqrt{(y_1 y_2)}} \\ 0 & \sqrt{1/(y_1 y_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_2 y_1 + x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y_1 y_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/(y_1 y_2)} \end{pmatrix} \in N.A \end{aligned}$$

Donc $N.A$ est stable par multiplication.

Pour l'inverse de $n_1 \cdot a_1$, si on pose :

$$n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x_1}{y_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

et

$$a = a_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{y_1} \end{pmatrix} \in A$$

Alors on vérifie que $n \cdot a = (n_1 \cdot a_1)^{-1}$ et donc que l'inverse est vérifié. Donc $N.A$ est bien un sous-groupe.

Montrons que $N.A \cap K = \{Id\}$:

Soit $g = n \cdot a = k \in N.A \cap K$, Alors g est de la forme :

$$g = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & \sqrt{1/y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

Par identification, $v = 0 = x$, et $y = 1/y = 1$ Donc $g = Id$.

5. Si $n = n(x)$, $a = a(y)$ et $z \in (C)$, on a :

$n \cdot z = \frac{1 \cdot z + x}{0 \cdot z + 1} = z + x =$ translation par x réel \Rightarrow Les orbites sont des bandes horizontales parallèles à Ox et un domaine fondamental est $i \cdot \mathbb{R}$ l'axe vertical des imaginaires purs.

$a \cdot z = \frac{\sqrt{y} \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1/\sqrt{y}} = z \cdot y =$ homothétie par y réel \Rightarrow Les orbites sont des demi-droites partant de z et passant par l'origine et un domaine fondamental est $\mathcal{C}^1 \cap \mathbb{H}$ le demi cercle unité supérieur.

6. Dans la question 1), on a montré qu'on pouvait effectivement trouver de tels a et n . Montrons donc leur unicité :

Supposons que $z = (na) \cdot i = (n'a') \cdot i$, alors :

$$(na) \cdot i = (n'a') \cdot i \Leftrightarrow (n'a')^{-1}(na) \cdot i = i \Leftrightarrow (n'a')^{-1}(na) \in SL_2(\mathbb{R})_i = K \text{ par 2)}$$

Mais on a aussi : $(n'a')^{-1}(na) \in N.A$, donc $(n'a')^{-1}(na) \in N.A \cap K = \{Id\}$ par 5)

$$\Rightarrow (n'a')^{-1}(na) = Id \Leftrightarrow na = n'a' \Leftrightarrow a'^{-1}a = n^{-1}n' \Leftrightarrow n = n', a = a' \text{ car } N \cap A = \{Id\}$$

7. Considérons $z := g.i$, c'est un nombre complexe obtenu à partir de i par action de g . Par 6), on peut écrire ce nouveau nombre complexe de façon unique comme : $z = na.i$, on a donc les égalités suivantes :
- $$g.i = z = na.i \Leftrightarrow na.i = g.i \Leftrightarrow g^{-1}na.i = i \Leftrightarrow g^{-1}na \in SL_2(\mathbb{R})_i = K$$
- $$\Rightarrow \exists k' \in K \text{ tq, } g^{-1}na = k' \Leftrightarrow g = nak'^{-1} = nak$$
8. Supposons que $g = n_1a_1k_1 = n_2a_2k_2$, alors :
- $$n_1a_1k_1 = n_2a_2k_2 \Leftrightarrow N.A \ni (n_2a_2)^{-1}n_1a_1 = k_2k_1^{-1} \in K$$
- Or $N.A \cap K = \{Id\} \Rightarrow (n_2a_2)^{-1}n_1a_1 = Id = k_2k_1^{-1}$
- $$\Rightarrow n_1a_1 = n_2a_2, k_1 = k_2. \text{ Par le même argument que précédemment, on a :}$$
- $$k_1 = k_2, a_1 = a_2, n_1 = n_2$$