Corrigé 6

Exercice 1.

On construit le lagrangien

$$L(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+\lambda(x_1+x_2+x_3-1)+\mu(x_1-x_2+2x_3-2)$$

où λ et μ sont les 2 paramètres de Lagrange correspondant aux 2 contraintes. Cherchons les points stationnaires du Lagrangien. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1+x_2+x_3-1=0,\\
\frac{\partial L}{\partial \mu}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1-x_2+2x_3-2=0,\\
\frac{\partial L}{\partial x_1}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=2x_1+\lambda+\mu=0,\\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=2x_2+\lambda-\mu=0,\\
\frac{\partial L}{\partial x_3}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=2x_3+\lambda+2\mu=0,\\
\frac{\partial L}{\partial x_4}(\lambda,\mu,x_1,x_2,x_3,x_4)&=2x_4=0.
\end{aligned}$$

Ainsi des 4 dernières équations on obtient :

$$x_1=-\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2},\quad x_2=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2},\quad x_3=-\frac{\lambda}{2}-\mu,\quad x_4=0.$$

En remplaçant dans les 2 premières on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{3\lambda}{2}-\mu &=& 1,\\ -\lambda-3\mu &=& 2,\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -2/7,\\ \mu &=& -4/7.\end{array}\right.$$

Ainsi le point $\widetilde{\mathbf{a}}=\left(\frac{3}{7},-\frac{1}{7},\frac{5}{7},0\right)$ est le seul candidat possible pour minimiser $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ sous les contraintes $x_1-x_2+2x_3=2$ et $x_1+x_2+x_3=1$. Montrons que le minimum est bien atteint par $f(\widetilde{\mathbf{a}})=\frac{5}{7}$.

Posons

$$E:=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1-x_2+2x_3=2,\quad x_1+x_2+x_3=1\}.$$

Cet ensemble n'est pas compact, donc nous ne pouvons pas encore statuer sur l'existence d'un extremum de f. Posons également

$$E_1 := \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| < 1\} \ni \widetilde{\mathbf{a}}.$$

Cet ensemble est compact, donc f y atteint son minimum

$$m := \min_{\mathbf{x} \in E_1} f(\mathbf{x}) \leq f(\widetilde{\mathbf{a}}) = \frac{5}{7} < 1.$$

De plus, pour tout $\mathbf{x} \in E \setminus E_1$, nous avons par définition de f

$$f(\mathbf{x}) > 1 > m,$$

d'où le fait que le minimum f dans E_1 est aussi un minimum dans E, qui est nécessairement atteint par le seul candidat obtenu par la méthode de Lagrange.

Méthode d'optimisation directe

Des 2 équations $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$, on tire

$$x_1 = \frac{3 - 3x_3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{x_3 - 1}{2}.$$

Ainsi, si $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, on pose

$$h(x_3, x_4) = f\left(\frac{3 - 3x_3}{2}, \frac{x_3 - 1}{2}, x_3, x_4\right) = \left(14x_3^2 - 20x_3 + 4x_4^2 + 10\right) \cdot \frac{1}{4}.$$

On a $\vec{\nabla} h(x_3, x_4) = \frac{1}{4}(28x_3 - 20 \ , \ 8x_4) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} h\left(\frac{5}{7}, 0\right) = 0$. Le point $\left(\frac{5}{7}, 0\right)$ est un point stationnaire de h. La matrice hessienne de h est constante et s'écrit

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et elle est trivialement symétrique définie positive. Le point $(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 0)$ réalise donc le minimum

$$\min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=2}} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \frac{5}{7}.$$

__Exercice 2.__

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit x et y la longueur respective de chacune des cathètes du triangle rectangle. Posons $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, g(x, y) = xy - 2A = 0\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Le problème posé revient ainsi à trouver le minimum de la fonction f

sur E.

Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où :

$$\begin{cases} 2a + \lambda b = 0 \\ \lambda a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda)(a+b) = 0,$$

ce qui entraîne, puisque $a, b > 0$, que $\lambda = -2$ ou encore $a = b$. On vérifie trivialement que $a = b$ et $\lambda = -2$ est solution du système ci-dessus. La contrainte $g(a,b) = 0$ implique que la seule solution possible est

$$(a,b) = (\sqrt{2A}, \sqrt{2A}).$$

Vérifions qu'il s'agit bien du minimum recherché.

D'abord, vu que $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, xy - 2A = 0\}$ n'est pas compact, nous ne pouvons pas dire que le minimum de f y est atteint. Par contre, l'ensemble

$$E_1 := E \cap [0, 2A] \times [0, 2A]$$

est compact et donc il existe $(a,b) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E_1} f(x,y).$$

Montrons que $f(a,b)$ est aussi le minimum de f sur E tout entier. En effet :

- $f(a,b) \leq f(\sqrt{2A}, \sqrt{2A}) = 4A < 8A^2$, car le point $(\sqrt{2A}, \sqrt{2A}) \in E_1$;
- $f(x,y) > 8A^2 > f(a,b)$, si $(x,y) \in E \backslash D$.

Ainsi, on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

Par conséquent, le triangle rectangle cherché n'est autre que le triangle rectangle isocèle dont la longueur de chaque cathète est $\sqrt{2A}$.

Méthode d'optimisation directe

La contrainte sur l'aire implique que $y = \dfrac{2A}{x}$. La fonction à minimiser est donc

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{4A^2}{x^2} = f(x).$$

Nous calculons ses dérivées pour $x > 0$:

$$f'(x) = 2x - \frac{8A^2}{x^3}, \qquad f''(x) = 2 + \frac{24A^2}{x^4}.$$

Nous calculons immédiatement que $f'(\sqrt{2A}) = 0$ et $f''(\sqrt{2A}) > 0$, d'où le minimum identique à la méthode précédente.

Exercice 3.

Rappel : Si P est un point de l'espace $\mathbb{R}^3$, la plus courte distance de P à la droite passant par le point A et parallèle au vecteur $\vec{v}$ est donnée par :

$$d = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

En effet, $\|\vec{AP}\times\vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme formé par $\vec{AP}$ et $\vec{v}$ et cette aire vaut aussi $\|\vec{v}\|.d$.

Posons maintenant $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1 = 0\}$. Pour $P = (x, y, z)$, on a $\vec{AP} = (x-2, y-1, z-1)$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{AP}\times\vec{v} = (0, z-1, 1-y)$ de sorte que le problème posé revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (y-1)^2+(z-1)^2$ sous la condition $g(x, y, z) = 0$.

Un tel minimum existe puisque la fonction f est continue et que E est compact.

Désignons par (a, b, c) un tel minimum. Puisque $\nabla g(a, b, c) \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où le système :

$$\begin{cases} 2\lambda a = 0, \\ 2(1 + 4\lambda)b - 2 = 0, \\ 2(1 + 4\lambda)c - 2 = 0. \end{cases}$$

On a alors :

1) Si $\lambda = 0$, alors $b = c = 1$ et donc $g(a, 1, 1) = a^2 + 7 \neq 0$, ce qui est impossible ;

2) Si $\lambda \neq 0$, alors $a = 0$ et $b = c$. Par conséquent, puisque $g(0, b, b) = 0$ avec $b = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, la distance minimale cherchée est

$$\sqrt{f(0, +\frac{1}{2\sqrt{2}}, +\frac{1}{2\sqrt{2}})} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.

Le parallélogramme est décrit par $\Omega = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 1, \ x - 1 \le y \le x\}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega x^2 \sin y \ dxdy &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^x x^2 \sin y \ dy \\
&= \int_0^1 x^2 \left(-\cos x + \cos(x-1)\right) dx.
\end{aligned}$$

On a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \ dx &= \left| x^2 \sin x \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \ dx \\
&= \sin 1 + \left| 2x \cos x \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2\cos x \ dx \\
&= \sin 1 + 2\cos 1 - 2\sin 1 = 2\cos 1 - \sin 1.
\end{aligned}$$

On a encore de la même manière

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos(x-1)}_{v'} dx &= \left| x^2 \sin(x-1) \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\sin(x-1)}_{v'} \ dx \\
&= \left| 2x \cos(x-1) \right|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2\cos(x-1) \ dx \\
&= 2 - 2\sin 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\iint_\Omega x^2 \sin y \ dxdy = 2 - \sin 1 - 2\cos 1.$$

Exercice 5.

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ non vide, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur E et définie au voisinage de $\mathbf{a}$.

Montrons que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \neq}} f(\mathbf{x})$ existe.

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^\infty \subset E$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$. Une telle suite existe puisque f est définie au voisinage de $\mathbf{a}$. On montre que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n)$ existe et qu'elle ne dépend pas de la suite choisie.

- f uniformément continue sur E implique :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon, \, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy $\Rightarrow$

$$\exists M > 0 \quad \text{tq} \quad \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \leq \delta, \quad \forall m, n \geq M.$$

- Ainsi $|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_m)| \leq \epsilon$, $\forall m, n \geq M$ et donc $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy, donc elle converge vers une limite ℓ.

- Montrons que $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n)$ est indépendant de la suite choisie (i.e. la limite est unique) :

  Méthode 1 : Par définition de ℓ et par continuité uniforme, il existe $\widetilde{M} > M$ et $\widetilde{\delta} < \delta$ tq

$$|\ell - f(\mathbf{x})| \leq \underbrace{|\ell - f(\mathbf{x}_n)|}_{\leq \epsilon/2} + \underbrace{|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x})|}_{\leq \epsilon/2}, \quad \forall n \geq \widetilde{M}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \widetilde{\delta}, \quad \mathbf{x} \in E.$$

  Ainsi, $|\ell - f(\mathbf{x})| \leq \epsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \widetilde{\delta}$.

  Méthode 2 : L'unicité de ℓ dépend du fait que si on prend une autre suite $(\mathbf{y}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{a}$, on a $\widetilde{\ell} = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{y}_n)$. De plus, si on construit la suite $(\mathbf{z}_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ par $\mathbf{z}_{2n} = \mathbf{x}_n$ et $\mathbf{z}_{2n+1} = \mathbf{y}_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{a}$ et par suite $\hat{\ell} = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{z}_n)$ existe. Comme $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ et $\big(f(\mathbf{y}_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ sont deux sous-suites de la suite $\big(f(\mathbf{z}_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ on a $\hat{\ell} = \widetilde{\ell} = \ell$.

<u>**Exercice 6.**</u>

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \int_t^{t^3} \cos(tx^2)\, dx.$$

a) On a $f'(t) = 3t^2 \cos t^7 - \cos t^3 - \displaystyle\int_t^{t^3} x^2 \sin(tx^2)\, dx$ et donc $f'(0) = -1$.

De même, $f''(t) = 6t \cos t^7 - 21t^8 \sin t^7 + 3t^2 \sin t^3 - 3t^8 \sin t^7 + t^2 \sin t^3 - \displaystyle\int_t^{t^3} x^4 \cos(tx^2)\, dx$ et donc $f''(0) = 0$.

b) Puisque $f''(0) = 0$, le point $(0, 0)$ sera un point d'inflexion de $G(f)$ si on a $f'''(0) \neq 0$. On se convainc facilement que $f'''(0) = 6$.

On peut remarquer alors qu'on obtient le développement limité :

$$f(t) = -t + t^3 + o(|t^3|) \quad \text{si} \quad t \underset{\neq}{\to} 0$$

ce qu'on peut facilement comprendre à partir de l'expression de f.