Corrigé 7

Devoir 1.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ donné par $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}$.
Calculons $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\; dx\, dy$.
Puisque la fonction f est radiale et comme D est une couronne circulaire centrée à l'origine, on effectue le changement de variables :

$$F(u,v) = \begin{cases} x = u \cos v, & 1 < u < 2, \\ y = u \sin v, & 0 \leq v < 2\pi. \end{cases}$$

Le jacobien est donné par $J(u,v) = u$ et l'intégrale I s'écrit donc

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_1^2 \frac{\sin u^2}{2+\cos u^2}\; u\; du = 2\pi \int_1^2 \frac{\sin u^2}{2+\cos u^2}\; u\; du.$$

En posant $\varphi(u) = \cos u^2$ on a $\varphi'(u) = -2u \sin u^2$ et finalement

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_1^2 \frac{\sin u^2}{2+\cos u^2}\; u\; du = -\pi \int_{\cos 1}^{\cos 4} \frac{d\varphi}{2+\varphi} \\ &= -\pi \Big| \ln(2+\varphi) \Big|_{\cos 1}^{\cos 4} = -\pi \cdot \ln\left(\frac{2+\cos 4}{2+\cos 1}\right) \\ &= \underline{\underline{\pi \cdot \ln\left(\frac{2+\cos 1}{2+\cos 4}\right)}}. \end{aligned}$$

Devoir 2.

Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2, x^2+y^2 < 1, z > 0\}$. Calculons $I = \displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$.
L'ensemble D est la partie du cylindre vertical $x^2+y^2 < 1$ comprise entre les plans $z = 0$ et $x+y+z = 2$. Si $\widetilde{D}$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^2$, on aura :

$$I = \iint_{\widetilde{D}} \Big(\int_0^{2-x-y} \sqrt{x^2+y^2}\, dz \Big) dxdy = \iint_{\widetilde{D}} \big(2-x-y\big) \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

En utilisant alors les coordonnées polaires $x = u\cos v, y = u\sin v$, pour l'intégrale sur $\widetilde{D}$, il vient

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \big(2 - u\cos v - u\sin v\big)u \cdot u\,du$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{2}{3} - \frac{\cos v + \sin v}{4}\Big)dv = \frac{4\pi}{3}.$$

Devoir 3.

Calculons $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$: Posons $D_k = B(0,k)$ pour k entier positif et calculons

$$I_k = \iint_{D_k} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy.$$

On utilise alors les coordonnées polaires :

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v,$$

avec $u \in]0,k[$ et $v \in]0, 2\pi[$. Il vient :

$$I_k = \int_0^{2\pi} dv \int_0^k \frac{\ln(1+u^2)}{(1+u^2)^2}udu.$$

Faisons le changement de variables $t = 1+u^2$, $dt = 2udu$. On a alors

$$I_k = \pi\int_1^{1+k^2} \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \pi\left|-\frac{1}{t}(1+\ln(t))\right|_{t=1}^{t=1+k^2} = \pi\Big(-\frac{1}{1+k^2} - \frac{\ln(1+k^2)}{1+k^2} + 1\Big)$$

et donc :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi.$$

Remarque : Ici nous avons :

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, continue, bornée, positive,

(2) $D_k \subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

(3) $\lim_{k\to\infty} I_k = M$ existe, et $(I_k)_{k=0}^{\infty}$ est une suite croissante bornée.

Ainsi, l'hypothèse du cours qui demande que l'intégrale de $|f|$ sur tout domaine borné soit $\leq M$ est a posteriori vérifiée. En effet, n'importe quel domaine borné $D' \subset \mathbb{R}^2$ est inclus dans D_k à partir d'un certain k_0 et on a alors $\int_{D'} |f(x,y)|dxdy \leq \int_{D_{k_0}} |f(x,y)|dxdy \leq M$.

Exercice 1.

— On a
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$
Ainsi,
$$\iint_{D_1} y\ dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\ dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-x^2)\ dx = \frac{1}{2}(2-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

— Soit D_2 le parallélogramme de sommets $A=(0,2)$, $B=(1,1)$, $C=(3,2)$ et $D=(2,3)$. Le bord de D_2 est limité par les droites suivantes :

(1) d_1 passant par A et B est donnée par l'équation : $y = 2-x$;

(2) d_2 passant par D et C est donnée par l'équation : $y = 5-x$;

(3) d_3 passant par B et C est donnée par l'équation : $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$;

(4) d_4 passant par A et D est donnée par l'équation : $y = 2 + \frac{x}{2}$.

D_2 est le parallélogramme compris entre les 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Il est l'union des deux triangles ABC et ADC qui admettent pour arête commune le segment (horizontal) AC.

Ainsi
$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} y\ dxdy &= \int_1^2 y\ dy \int_{2-y}^{2y-1} dx + \int_2^3 y\ dy \int_{2y-4}^{5-y} dx \\
&= \int_1^2 y(3y-3)dy + \int_2^3 y(9-3y)\ dy \\
&= \int_1^2 (3y^2-3y)\ dy + \int_2^3 (9y-3y^2)\ dy \\
&= \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6.
\end{aligned}$$

<u>Exercice 2.</u>

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x-2)^2 + y^2 < 4,\ y > 0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ donné par
$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2-4x+4) = \cos((x-2)^2+y^2).$$

Calculons $I = \iint_D f(x,y)\ dx\,dy$.
Puisque la fonction f est radiale et comme D est une demi-couronne circulaire centrée au point $(2,0)$, on effectue le changement de variables :

$$F(u,v) = \begin{cases} x = 2 + u\ \cos\ v, & 1 < u < 2, \\ y = u\ \sin\ v, & 0 < v < \pi. \end{cases}$$

Le jacobien est donné par $J(u,v) = u$ et l'intégrale I s'écrit donc

$$I = \int_0^\pi dv \int_1^2 \cos(u^2)\ u\ du = \pi \int_1^2 \cos(u^2)\ u\ du.$$

En posant $\varphi(u) = u^2$ on a $\varphi'(u) = 2u$ et finalement

$$I \ = \ \frac{\pi}{2} \int_1^4 \cos(\varphi)\ d\varphi \ = \ \frac{\pi}{2} \Big| \sin(\varphi) \Big|_1^4 \ = \ \frac{\pi}{2} \left(\sin(4) - \sin(1) \right).$$

<u>Exercice 3.</u>

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 < 36,\ x > 0, y \geq 0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ donné par $f(x,y) = x^2y^4$.
Commençons par remarquer que l'équation

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

est l'équation d'une ellipse centrée à l'origine passant par les points $(2,0)$ et $(0,3)$.
Le domaine D est donc un quart d'ellipse. On propose le changement de variables :

$$F(u,v) = \begin{cases} x = 2u\cos v, & 0 < u < 1, \\ y = 3u\sin v, & 0 < v < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On calcule la matrice jacobienne et le jacobien du changement de variable

$$D_{(u,v)}F(u,v) = \begin{bmatrix} 2\cos v & -2u\sin v \\ 3\sin v & 3u\cos v \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J(u,v) = 6u.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\ dx\,dy \ &= \ \int_0^1 du \int_0^{\pi/2} (6 \cdot 2^2 \cdot 3^4) \cdot u^7 \cdot \cos^2 v \cdot \sin^4 v\ dv \\ &= \ \frac{1944}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^2 v \cdot \sin^4 v\ dv = 243 \int_0^{\pi/2} \cos^2 v \sin^4 v\ dv. \end{aligned}$$

Les formules trigonométriques nous donnent $\cos^2 v \cdot \sin^4 v = \dfrac{1}{8}\sin^2 2v\,(1-\cos 2v)$, et par suite

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \frac{243}{8}\left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 2v\ dv - \int_0^{\pi/2} \sin^2 2v\ \cos 2v\ dv\right] \\
&= \frac{243}{16}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\ d\theta - \frac{243}{16}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{243}{16}\int_0^{\pi} (\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2})\ d\theta - \frac{243}{16}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{243}{32}\pi - \frac{243}{32}\left|\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\pi} - \frac{243}{16}\left|\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\pi} \\
&= \underline{\underline{\frac{243}{32}\pi.}}
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Calculons $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$ où D est le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2} &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^2}dz \\
&= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left|-\frac{1}{x+y+z+1}\right|_{z=0}^{z=1-x-y} \\
&= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+y+1}\Big) \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{x-1}{2} + \ln 2 - \ln(1+x)\Big)dx \\
&= \left|\frac{(x-1)^2}{4} + x(1+\ln 2) - (1+x)\ln(1+x)\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} - \ln 2.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z^2,\ 0<z<3\}$ et calculons

$$I := \iiint_D z(x^2+y^2)\,dxdydz.$$

L'ensemble D est un cône centré en l'axe z, pointé sur l'origine et de hauteur 3. Nous effectuons un changement de coordonnées cylindriques :

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = z,\quad J(u,v,z) = u.$$

D'où $D = \{(u\cos v, u\sin v, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < z,\ 0 \leq v < 2\pi,\ 0 < z < 3\}$, ce qui donne

$$I \;=\; \int_0^3 z\Big(\int_0^{2\pi} dv \int_0^z u^2 \cdot u\, du\Big) dz \;=\; 2\pi \int_0^3 z\Big(\int_0^z u^3\, du\Big) dz \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^3 z^3\, dz \;=\; \frac{243\pi}{4}.$$

Exercice 6.

Posons $D_k = \,]-k,k[\, \times \,]-k,k[\,$ pour k entier positif et $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Alors

(1) $D_k \subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$,

(2) n'importe quel domaine borné $D' \subset \mathbb{R}^2$ est inclus dans D_k à partir d'un certain k.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est continue, bornée, positive.

Posons $I_k := \iint_{D_k} \dfrac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Nous ne sommes a priori pas sûrs que la suite $(I_k)_{k\geq 1}$ converge (elle est clairement croissante, puisque $f > 0$, mais pas sûr qu'elle soit bornée). Nous calculons la limite pour avoir la convergence a posteriori :

$$I_k \;=\; \int_{-k}^{k} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-k}^{k} \frac{dy}{1+y^2} \;=\; \Big(\Big|\mathrm{Arctg}(x)\Big|_{x=-k}^{x=k}\Big)^2 \;=\; 4\mathrm{Arctg}(k)^2$$

et donc, puisque la limite est indépendante du recouvrement D_k

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi^2.$$

Exercice 7.

Nous vérifions d'abord que l'intégrale converge absolument. En effet, par un critère de comparaison et par l'exemple du cours,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Big|e^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\Big| \;\leq\; \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \;=\; \pi.$$

Calculons ensuite cette intégrale. Soit $D_k = B(0,k)$ pour k entier positif et calculons

$$I_k = \iint_{D_k} e^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\, dxdy.$$

On utilise alors les coordonnées polaires :

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v,$$

avec $u \in]0,k[$ et $v \in]0, 2\pi[$. Il vient :

$$I_k = \int_0^{2\pi} dv \int_0^k e^{-u^2}\cos(u^2) u du.$$

Faisons le changement de variables $t = u^2$, $dt = 2udu$. On a alors

$$I_k = \pi \int_0^{k^2} e^{-t}\cos(t) dt = \frac{\pi}{2}\left|e^{-t}(\sin(t) - \cos(t))\right|_{t=0}^{t=k^2} = \frac{\pi}{2}(e^{-k^2}(\sin(k^2) - \cos(k^2)) + 1)$$

et donc :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2)\, dxdy = \lim_{k\to\infty} I_k = \frac{\pi}{2}.$$