Corrigé 8

Exercice 1. On effectue les 4 étapes suivantes :

1.) Paramétrisation de Γ :

$$\vec{r}(t) = \cos t \ \vec{i} + \sin t \ \vec{j} + t\vec{k}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

2.) Calcul de $d\vec{r}$ et $d\gamma$:

On a $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)dt$ et $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k}$,
et $d\gamma = \| \vec{r}\,'(t) \| \ dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \ dt = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} \ dt = \sqrt{2} \ dt.$

3.) Calcul de $\vec{v}$ le long de Γ :

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (x(t)^2 + y(t)^2) \ \vec{i} + z(t) \ \vec{j} + x(t) \ \vec{k} = 1 \ \vec{i} + t \ \vec{j} + \cos t \ \vec{k}.$$

- 4.) Calcul des intégrales :

a) $\int_\Gamma d\gamma$:

$$\int_\Gamma d\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \ dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

b) $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((1)(-\sin t) + t\cos t + \cos t \Big) \ dt \\
&= \Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[t \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt + \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} - 1 + 1 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 2. On effectue les 4 étapes suivantes :

• 1.) Paramétrisation de Γ :

$$\mathbf{r}(t) = \vec{OP} + t\vec{PQ}, \quad t \in [0,1]. \text{ Donc :}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 2 \\ 3-3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

• 2.) Calcul de $d\gamma$ et $d\mathbf{r}$:

$$ds = \| \mathbf{r}'(t) \| \, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt = \sqrt{16+0+9} \, dt = 5 \, dt$$

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} dt.$$

• 3.) Calcul de f et $\mathbf{v}$ le long de Γ :

$$f(\mathbf{r}(t)) = x(t)^2 + z(t) + y(t)z(t) = (1+4t)^2 + (3-3t) + 2.(3-3t),$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \begin{pmatrix} x(t)^2 \\ y(t)z(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+4t)^2 \\ 2.(3-3t) \\ (3-3t) \end{pmatrix}.$$

• 4.) Calcul des intégrales :

a) $\int_\Gamma d\gamma$: $\displaystyle\int_\Gamma d\gamma = \int_0^1 5 \, dt = 5.$

b) $\int_\Gamma f \, d\gamma$: $\displaystyle\int_\Gamma f ds = \int_0^1 \Big((1+4t)^2 + 3(3-3t) \Big) 5 \, dt = 5 \left[\tfrac{1}{12}(1+4t)^3 - \tfrac{1}{2}(3-3t)^2 \right]_0^1 = \frac{445}{6}.$

c) $\int_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$: $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \Big(4(1+4t)^2 - 3(3-3t) \Big) \, dt = \frac{221}{6}.$

Exercice 3.

On peut paramétrer Γ par

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x = \cos\, t \\ y = \sin\, t \\ z = \cos\, t + \sin\, t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Ainsi $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t),\ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\ |\mathbf{r}'(t)|\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t + \sin t)\cos t + \cos t \sin t(-\sin t + \cos t)]\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t \cos t - \sin^2 t + 2\cos^2 t - \sin^2 t \cos t + \cos^2 t \sin t\right]\ dt.
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, en faisant le changement de variables $s = \sin t, ds = \cos t\, dt$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

Enfin si on pose $s = \cos t, ds = -\sin t\, dt$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

On conclut ainsi que

$$\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\ d\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.

Nous pouvons exprimer le triangle par

$$D \ := \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} < y < 2x,\ 0 < x \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} < y < 3 - x,\ 1 \leq x < 2\}.$$

Le bord Γ du triangle est composé de trois courbes simples :

$$\Gamma_1 \ := \ \{\vec{p}(t) = (t, \tfrac{t}{2}) : t : 0 \to 2\}, \quad \Gamma_2 \ := \ \{\vec{q}(t) = (t, 3-t) : t : 2 \to 1\}$$

$$\Gamma_3 \ := \ \{\vec{r}(t) = (t, 2t) : t : 1 \to 0\}.$$

Vérifions la première formule de Green-Riemann

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dxdy \ = \ -\int_\Gamma f\, dx.$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} x\;dy \;+\; \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x\;dy \\
&= \int_0^1 x\left(2x - \frac{x}{2}\right)\,dx \;+\; \int_1^2 x\left(3 - x - \frac{x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,dx \;+\; 3\int_1^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \;+\; 1 \;=\; \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_\Gamma f\,dx &= -\int_{\Gamma_1} f\,dx - \int_{\Gamma_2} f\,dx - \int_{\Gamma_3} f\,dx \\
&= -\int_0^2 f(\vec{p}(t))p_1'(t)\,dt - \int_2^1 f(\vec{q}(t))q_1'(t)\,dt - \int_1^0 f(\vec{r}(t))r_1'(t)\,dt \\
&= -\int_0^2 \frac{t^2}{2}\cdot 1\,dt + \int_1^2 t(3-t)\cdot 1\,dt + \int_0^1 2t^2\cdot 1\,dt \\
&= -\frac{4}{3} + \frac{13}{6} + \frac{2}{3} \;=\; \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

La première formule est ainsi vérifiée. La seconde :

$$
\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dxdy \;=\; \int_\Gamma f\,dy.
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} y\;dy \;+\; \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y\;dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4x^2 - \frac{x^2}{4}\right)\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_1^2 \left((x-3)^2 - \frac{x^2}{4}\right)\,dx \\
&= 2\int_0^1 x^2\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_1^2 (x-3)^2\,dx - \frac{1}{8}\int_0^2 x^2\,dx \\
&= \frac{2}{3} \;+\; \frac{7}{6} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f\,dy &= \int_{\Gamma_1} f\,dy + \int_{\Gamma_2} f\,dy + \int_{\Gamma_3} f\,dy \\
&= \int_0^2 f(\vec{p}(t))p_2'(t)\,dt + \int_2^1 f(\vec{q}(t))q_2'(t)\,dt + \int_1^0 f(\vec{r}(t))r_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^2 \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dt - \int_1^2 t(3-t)\cdot(-1)\,dt - \int_0^1 2t^2\cdot 2\,dt \\
&= \frac{2}{3} + \frac{13}{6} - \frac{4}{3} \;=\; \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

La seconde formule est ainsi vérifiée.

<u>Exercice 5.</u>

Construisons le lagrangien :

$$L(\lambda, x, y, z) = x^2 + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

En cherchant les points stationnaires du lagrangien L on a :

$$\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0; \\
(2) & \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0; \\
(3) & \dfrac{\partial L}{\partial y} = z + 2\lambda y = 0; \\
(4) & \dfrac{\partial L}{\partial z} = y + 2\lambda z = 0.
\end{array}$$

On obtient donc 4 équations pour 4 inconnues λ, x, y, z. De l'équation (2) on tire $x = 0$ ou $\lambda = -1$.

<u>1^{er} cas :</u> $x = 0$. De l'équation (3) on a $z = -2\lambda y$ et en remplaçant dans (4) on obtient $y - 4\lambda^2 y = 0$. Deux cas se présentent : $y = 0$ et $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.
Si $y = 0$, on obtient par (3) $z = 0$ et on obtient une incompatibilité avec (1). Ainsi $y \neq 0$.
Si $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ on obtient en remplaçant dans (3) (4) $z \pm y = 0$ et $y \pm z = 0$ et ainsi $z = \pm y$.
En mettant $x = 0, z = \pm y$ dans (1) on obtient $2y^2 = 1$ et donc $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
En résumé, on a donc les solutions :

- $x = 0, y = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = +\dfrac{1}{2}$;
- $x = 0, y = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}$;
- $x = 0, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}$;
- $x = 0, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = +\dfrac{1}{2}$.

<u>2^{eme} cas :</u> $x \neq 0$ et $\lambda = -1$. Dans les équations (3) et (4) nous avons avec $\lambda = -1$, $z - 2y = 0$ et $y - 2z = 0$ qui implique $y = z = 0$. En remplaçant dans (1) on obtient $x = \pm 1$ qui dans f donne $f(\pm 1, 0, 0) = 1$.
On obtient finalement

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z) = 1 \quad \text{et} \quad \min_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 6.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide convexe et soit $f \in C^1(E)$. Si $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{y}$, démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$, qu'il existe $\vec{z} \in E$, $\vec{z} \neq \vec{x}, \vec{z} \neq \vec{y}$ tel que

$$f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + \vec{\nabla} f(\vec{z}) \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

où $\cdot$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{\nabla}$ est le gradient.

Démonstration :

1.) Si $\vec{x}, \vec{y} \in E$ alors le segment $[\vec{x}, \vec{y}]$ d'origine $\vec{x}$ et d'extrémité $\vec{y}$ est inclus dans E car E est convexe.

2.) Si $\vec{z}(t) = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}), 0 \leq t \leq 1$, alors $\vec{z}(0) = \vec{x}, \vec{z}(1) = \vec{y}$ et $\{\vec{z}(t), 0 \leq t \leq 1\} = [\vec{x}, \vec{y}]$.

3.) Si $\ell(t) = f(\vec{z}(t)) = f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))$ on a $\ell \in C^1[0,1]$ et $\ell'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})).(\vec{y} - \vec{x})$.

4.) Le thm. des accroissements finis sur $\mathbb{R}$ dit : $\exists \bar{t} \in]0,1[$ tel que $\ell(1) = \ell(0) + \ell'(\bar{t})(1-0)$ ce qui se traduit : $f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + \vec{\nabla} f(\vec{x} + \bar{t}(\vec{y} - \vec{x})).(\vec{y} - \vec{x})$ et on pose $\vec{z} = \vec{x} + \bar{t}(\vec{y} - \vec{x})$.

Exercice 7.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -2xe^{x^2+y^2+z^2+x^4} + 2xf(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2ye^{x^2+y^2+z^2+y^4} + 2yf(x,y,z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2zf(x,y,z)$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = -2e^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 2e^4, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 0$$

d'où le résultat.