ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

CORRECTIONS EXAMEN COURS EULER

Cours:	Analyse II (Module B)
Enseignant:	Alexandre Caboussat
Date:	21 mars 2018
Durée:	135 minutes

Nombre de pages (page de garde incluse): 7

Nom:

Prénom:

Note:

Instructions et matériel autorisé:

Aucun matériel n'est autorisé.
Pour tous les exercices, prendre soin à la rédaction.
Enoncer clairement les hypothèses et justifier tous vos calculs.

Merci de laisser ce document agrafé. Si vous séparez les pages, vous serez responsable de toute page manquante. Prière de s'assurer que toutes les pages sont présentes lorsque vous rendez votre copie.

Exercice 1 (15 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'arc lisse

$$\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z = x + y\}$$

et le champ vectoriel $\vec{u}(x, y, z) = (x + y, 2z, xy)$. Calculer la circulation de $\vec{u}$ sur Γ.

On peut paramétrer Γ par

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = \cos\ t \\ y = \sin\ t \\ z = \cos\ t + \sin\ t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Ainsi $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t),\ \ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{\tau} d\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{u} \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\ |\vec{r}'(t)|\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t + \sin t)\cos t + \cos t \sin t(-\sin t + \cos t)]\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t \cos t - \sin^2 t + 2\cos^2 t - \sin^2 t \cos t + \cos^2 t \sin t\right]\ dt.
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, en faisant le changement de variables $s = \sin t, ds = \cos t\, dt$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

Enfin si on pose $s = \cos t, ds = -\sin t\, dt$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

On conclut ainsi que

$$\int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{\tau}\ d\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 (15 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$ mais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ n'existent pas.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Donc, on en déduit que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0;$$

et donc les deux fonctions

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

sont continues en $(0,0)$. Par contre, puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

et que cette limite n'existe pas, on a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

n'existe pas. Le raisonnement est le même pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

Exercice 3 (20 points)

a) Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ et deux fonctions $\varphi, \psi : B(0,\delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 1$, et telles que, $\forall (x,y) \in B(0,\delta)$:

$$\varphi^2(x,y) - \psi^2(x,y) = x, \quad \text{et} \quad \varphi(x,y)\psi(x,y) = y+1.$$

Considérons

$$f(x,y,u,v) = x - u^2 + v^2 \quad \text{et} \quad g(x,y,u,v) = y - uv + 1$$

Puisque $f, g \in C^1$ au voisinage de $(0,0,1,1)$ et que

$$f(0,0,1,1) = g(0,0,1,1) = 0$$

et que la matrice Jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1,1) & \frac{\partial f}{\partial v}(0,0,1,1) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(0,0,1,1) & \frac{\partial g}{\partial v}(0,0,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a un déterminant égal à $4 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites permet de conclure qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et deux fonctions $\varphi, \psi : B(0,\delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(0,0) = 1$ et $\psi(0,0) = 1$ et telles que, pour tout $(x,y) \in B(0,\delta)$:

$$\begin{aligned} f(x,y,u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)) &= x - \varphi^2(x,y) + \psi^2(x,y) = 0 \\ g(x,y,u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)) &= y - \varphi(x,y)\psi(x,y) + 1 = 0 \end{aligned}$$

b) Calculer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(0,0)$$

En dérivant les deux expressions précédentes par rapport à x et par rapport à y, on obtient que pour tout $(x,y) \in B(0,\delta)$:

$$\begin{cases} 1 - 2\varphi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + 2\psi(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\psi(x,y) - \varphi(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -2\varphi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + 2\psi(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = 0 \\ 1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\psi(x,y) - \varphi(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne en $x = y = 0$:

$$\begin{cases} 1 - 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) + 2\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,0) = 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(0,0) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -2\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(0,0) = 0 \\ 1 - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial\psi}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 (20 points)

Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous la condition $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$.

Indication : Montrer dans un premier temps que les extrema existent. Dans un second temps, calculer ces extrema en distinguant les différents cas.

Comme $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$ est l'équation d'un ellipsoide, l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0\}$$

est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent la restriction à E de la fonction continue f atteint son minimum et son maximum.

Désignons par (x, y, z) un des points où la restriction de f à E atteint un de ces extrema. Selon la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous définissons:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1)$$

et cherchons ses points stationnaires:

$$\begin{aligned} 2x + \lambda(10x) &= 0 \\ 2y + \lambda(18y + 4z) &= 0 \\ 2z + \lambda(12z + 4y) &= 0 \\ 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 &= 0 \end{aligned}$$

— Si $y = z = 0$, alors $5x^2 - 1 = 0$. Dans ce cas $f(x, y, z) = 1/5$

— Si $y \neq 0$ ou $z \neq 0$, alors

$$\det \begin{pmatrix} 2 + 18\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 2 + 12\lambda \end{pmatrix} = 4(50\lambda^2 + 15\lambda + 1) = 0$$

ou encore

$$\lambda = -\frac{1}{5} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{1}{10}$$

Par conséquent:

- Si $\lambda = -\frac{1}{5}$, on a $z = -2y$ et $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 5x^2 + 25y^2 - 1 = 0$. Dans ce cas, $f(x, y, z) = 1/5$;
- Si $\lambda = -\frac{1}{10}$, on a $x = 0$, $y = 2z$ et et $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 50z^2 - 1 = 0$. Dans ce cas, $f(x, y, z) = 1/10$;

En conclusion:

$$\max_{(x,y,z)\in E} f(x, y, z) = 1/5, \qquad \min_{(x,y,z)\in E} f(x, y, z) = 1/10$$

Exercice 5 (15 points)

Soit

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0,\, x^2 + y^2 < 1,\, x^2 + y^2 + z^2 < 4\right\}.$$

Calculer

$$\int_D z\, dxdydz$$

$$\begin{aligned}
\int_D z\, dxdydz &= \int\int_{B(0,1)} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{B(0,1)} (4 - x^2 - y^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (4 - \rho^2)\rho d\theta\right) d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (4 - \rho^2)\rho d\theta \\
&= \frac{7\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (15 points)

Soit E un sous-ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est constante sur ∂E et qui est de classe C^1 sur E. Montrer que f possède au moins un point stationnaire dans E.

Puisque E est borné, son adhérence $\overline{E}$ l'est aussi; ce qui entraine que $\overline{E}$ est compact. Ainsi, puisque la fonction f est continue, il existe deux éléments a et b de $\overline{E}$ tels que

$$f(a) = \min_{x \in \overline{E}} f(x) \quad \text{et} \quad f(b) = \max_{x \in \overline{E}} f(x)$$

Si $f(a) = f(b)$, la fonction est constante; ce qui implique que tous les éléments de E sont des points stationnaires de f.

Si $f(a) \neq f(b)$, on a, puisque f est constante sur ∂E, que a ou b appartient à E; ce qui entraîne que a ou b est un point stationnaire de f.