Série 1

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \;=\; t(u(t))^4, \quad t \in\; [0,\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Discuter, selon $u_0 \in \mathbb{R}$ l'existence de solutions globales ou maximales sur $[0,\infty[$.

Devoir 2. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^*$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t)u(t) + t(u(t))^2 + t \;=\; 0, \quad t \in\; [0,\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

n'admet pas de solution globale et calculer les solutions maximales.

A faire PENDANT et APRES le cours :

Exercice 1.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = (u(t))^2 - 5u(t) + 6, \quad t \in [0,\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Démontrer que ce problème a une solution globale si $u_0 \leq 3$ et que si $u_0 > 3$, ce problème a une solution maximale non globale.

Exercice 2.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \;=\; f(t,u(t)), \quad \forall t \in]0,\infty[, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec $f(t,x) = \dfrac{t^4+1}{t^4-1}$, $t \in]0,\infty[$. Montrer que ce problème n'a pas de solution globale et calculer une solution maximale.

Exercice 3.

Soit $I = [t_0,\infty[$ et soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que si $u \in C^0(I)$, u dérivable sur $\overset{\circ}{I} =]t_0,\infty[$ satisfait

$$\dot{u}(t) = f(t,u(t)), \quad \forall t > t_0,$$

alors $u \in C^1(I)$.

Exercice 4.

Soit $I = [t_0,\infty[$ et soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $t \in I$ est fixé, on suppose que la dérivée de $f(t,\cdot)$ par rapport à x existe en tout point de $\mathbb{R}$ et est non positive. On note cela ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \le 0, \ \forall t \in I, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que le problème de Cauchy : trouver $u \in C^1(I)$ tel que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t,u(t)), \quad t \in I, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$, a une solution globale unique.

Exercice 5.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. Montrer que les solutions de l'équation de Ricatti

$$u'(t) = p(t)u(t)^2 + q(t)u(t) + f(t)$$

se déduisent des solutions de l'équation de Bernoulli

$$v'(t) - (2p(t)u_0(t) + q(t))v(t) = p(t)v(t)^2$$

en posant $u(t) = v(t) + u_0(t)$, où $u_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation de Ricatti.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

(1) Montrer que, si une fonction $v \in C^2(I)$ est solution de l'équation de Clairaut :

$$u(t) = tu'(t) + f(u'(t))$$

alors

$$v''(t)(t + f'(v'(t))) = 0$$

(2) En déduire les solutions $v \in C^2(\mathbb{R})$ qui sont solutions de

$$u(t) = tu'(t) + (u'(t))^2$$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = \arctan(t\,y(t))$$

(1) Vérifier que l'on peut appliquer le théorême de Cauchy-Lipschitz dans le cas de cette équation différentielle pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(2) Soit $y_{\max} : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale de cette équation différentielle, avec condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

  (a) Montrer que la dérivée $y'_{\max}(x)$ est une fonction bornée sur J.

  (b) Montrer que si J est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ alors $y_{\max}$ est une fonction bornée sur J.

  (c) En déduire que la solution maximale $y_{\max}$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.