Série 7

Dans toute la feuille les espaces affines sont supposes de dimension finie.

Soit X un espace affine de direction V.

Soient $\{P_0, \cdots, P_n\} \subset V$ des points de V.

- Si $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est tel que V est l'ensemble des barycentres (algebriques) des points $\{P_0, \cdots, P_n\}$:

$$V = \{Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n),\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\},$$

  on dit que $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est une famille generatrice de l'espace affine X.
- Si $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est tel que pour tout $P \in X$ qui est un barycentre de ces points,

$$P = Bar(P_0, \cdots, P_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n)$$

  le $n+1$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ est unique, on dit que $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est libre.
- Une base affine est donc une famille libre et generatrice.

Exercice 1. Montrer que

1. $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est generatrice $\Longleftrightarrow$ $\{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$ est generatrice de V. Et qu'alors $n \geqslant \dim X$.
2. $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est libre $\Longleftrightarrow$ $\{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$ est libre dans V. Et qu'alors $n \leqslant \dim X$.

Exercice 2. Soit $\varphi : X \to Y$ une application affine.

1. Montrer que $\varphi(X)$ est un sous-espace affine de Y et en donner une famille generatrice ; donner sa direction en fonction de φ_0.
2. Montrer que si $y \in \varphi(X)$ alors

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X,\ \varphi(x) = y\}$$

   est un sous-espace affine et donner sa direction en fonction de φ_0.

3. Montrer que pour tout $y \in \varphi(X)$, on a
$$\dim X = \dim \varphi^{-1}(\{y\}) + \dim \varphi(X).$$
4. Montrer que φ est surjective ssi φ transforme au moins une famille generatrice en une famille generatrice (et qu'alors elle transforme toute familles generatrice en une famille generatrice).
5. Montrer que φ est injective ssi φ transforme toute famille libre en une famille libre.
6. On suppose $\dim X = \dim Y$. Montrer que φ est bijective ssi l'une ou l'autre des propriete suivante est vraie :
   — φ est injective.
   — φ_0 est injective.
   — φ est surjective.
   — φ_0 est surjective.

Exercice 3. Soit φ l'application affine qui envoie
$$P_0 = (1,1,1), P_1 = (1,1,2),\ P_2 = (1,2,1),\ P_3 = (2,2,4)$$
sur
$$Q_0 = (1,2,3), Q_1 = (1,3,3),\ Q_2 = (2,3,6),\ Q_3 = (1,2,4).$$
1. Pourquoi φ existe-elle ? Pourquoi est elle unique ?
2. Decomposer φ sous forme translation/partie lineaire. Calculer son image et $\varphi^{-1}((3,2,1))$. Si φ est inversible calculer son inverse.
3. Meme question pour l'application affine qui envoie les meme quatre points sur
$$Q_0 = (1,2,3), Q_1 = (1,3,3),\ Q_2 = (1,7/3,10/3),\ Q_3 = (1,2,4).$$
4. Existe-t-il une application affine qui envoie
$$P_0' = (1,1,1), P_1' = (1,1,2),\ P_2' = (3/2,3/2,3),\ P_3' = (2,2,4)$$
sur
$$Q_0' = (1,2,3), Q_1' = (1,3,3),\ Q_2' = (1,5/2,7/2),\ Q_3' = (1,2,4)\ ?$$
Cette application est elle unique ?

Exercice 4. Soit X un espace affine de direction V. Soit $\mathrm{AGL}(X)$ le groupe des applications affines inversibles, $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications lineaires, $T(V) = \{t_{\vec{v}} : P \to P + \vec{v},\ \vec{v} \in V\} \subset \mathrm{AGL}(X)$ le sous-groupe des translations et
$$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{AGL}(X) & \mapsto & \mathrm{GL}(V) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$
le morphisme "partie lineaire" dont on rappelle que le noyau est $\ker(\mathrm{lin}) = T(V)$.

1. Montrer que lin est surjectif.
2. Soit $P \in X$ et soit

$$\mathrm{AGL}(X)_P = \{\varphi \in \mathrm{AGL}(X),\ \varphi(P) = P\}$$

   le stabilisateur dans P dans $\mathrm{AGL}(X)$; c'est donc un sous-groupe de $\mathrm{AGL}(X)$. Montrer que la restriction de l'application partie lineaire

$$\mathrm{lin} : \mathrm{AGL}(X)_P \to \mathrm{GL}(V)$$

   est un isomorphisme de groupes (la surjectivite demande donc, etant donne $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(V)$ de construire une application affine φ fixant P et de partie lineaire φ_0). Montrer que ce sous-groupe n'est pas normal (sauf si $\dim X = 0$).
3. On suppose que $X = V$. Montrer que $\mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe de $\mathrm{AGL}(V)$. Quel est ce sous-groupe par rapport a la question precedente.

Exercice 5. Soit X un espace affine et $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des bases affines de X.

1. Montrer que tout element de $\mathrm{AGL}(V)$ transforme une base affine en une autre base affine.
2. Montrer que cela induit une action de $\mathrm{AGL}(V)$ sur $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ et que $\mathrm{A}\mathcal{B}(X)$ est un espace principal homogene.