Règle de Cramer
Algèbre linéaire I — MATH 1057 F

Julien Dompierre

Département de mathématiques et d'informatique
Université Laurentienne

Sudbury, 15 février 2011

LaurentianUniversity
UniversitéLaurentienne

Règle de Cramer

- Une nouvelle méthode pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  - (réduction par rapport aux lignes de la matrice $[A \mid \mathbf{b}]$)

  $\longrightarrow$ Règle de Cramer
- Une nouvelle méthode pour inverser une matrice
  - (réduction par rapport aux lignes de la matrice $[A \mid I]$)

  $\longrightarrow$ Matrice adjointe
- Une application géométrique de l'inverse

  $\longrightarrow$ Effet sur les aires/volumes d'une transformation linéaire.

Règle de Cramer (p. 201)

Notons $A_i(\mathbf{b})$ la matrice obtenue en remplaçant dans une matrice $A(n,n)$ la $i$ème colonne par un vecteur $\mathbf{b}$ quelconque de $\mathbb{R}^n$:

$$A_i(\mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array}\right].$$

Exemple : Si la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ sont

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

alors

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ -3 & 8 & 9 \end{bmatrix}, A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 7 & -3 & 9 \end{bmatrix}, A_3(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Règle de Cramer (p. 201)

Avec la notation

$$A_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Théorème (7)

Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. Quel que soit $\mathbf{b}$ élément de $\mathbb{R}^n$, les composantes de l'unique solution $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sont données par

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemple de la règle de Cramer (exe 2, p. 209)

Si la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ sont

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

alors

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

On a que $\det A = 3$, $\det A_1(\mathbf{b}) = 5$ et $\det A_2(\mathbf{b}) = -2$. Et donc

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{5}{3} \text{ et } x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{-2}{3}.$$

Exemple de la règle de Cramer (exe 5, p. 209)

Si la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ sont

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix},$$

alors

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, A_3(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

On a que $\det A = 4$, $\det A_1(\mathbf{b}) = 6$, $\det A_2(\mathbf{b}) = 16$ et $\det A_3(\mathbf{b}) = -14$. Donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \; x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{16}{4} = 4 \text{ et} \\ x_3 &= \frac{\det A_3(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}. \end{aligned}$$

LaurentianUniversity UniversitéLaurentienne

Démonstration de la règle de Cramer (p. 202)

Démonstration.

Si les colonnes de A sont notées $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ et les colonnes de I, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, la multiplication matricielle, par définition, permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{x}) &= [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{x} \cdots \mathbf{e}_n] \\ A\, I_i(\mathbf{x}) &= [A\mathbf{e}_1 \cdots A\mathbf{x} \cdots A\mathbf{e}_n] \\ &= [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b} \cdots \mathbf{a}_n] = A_i(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Par la règle du déterminant d'un produit, on a que

$$\det A_i(\mathbf{b}) = \det (A\, I_i(\mathbf{x})) = (\det A)(\det I_i(\mathbf{x})).$$

Or $\det I_i(\mathbf{x}) = x_i$. Sachant que A est inversible, alors $\det A \neq 0$, et on peut diviser par $\det A$ pour obtenir

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}. \qquad \square$$

Matrice ajointe (p. 203)

Définition

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ le cofacteur de a_{ij}. La matrice dont les éléments (i, j) sont C_{ij} est appelée **matrice des cofacteurs** *de A. La transposée de cette matrice est appelée l'***adjointe** *de A et est notée* $\operatorname{adj}(A)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}}_{\textit{matrice des cofacteurs}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}}_{\textit{matrice adjointe}}$$

Formule de l'inverse (p. 203)

Théorème

Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Corollaire

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)\,A = (\det A)\,I.$$

Preuve du corollaire :
On multiplie à gauche, (resp. à droite) l'égalité du théorème par A.

$$A\,A^{-1} = \frac{1}{\det A} A(\operatorname{adj} A)$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)\,A$$

Exemple de l'inverse

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. La matrice des cofacteurs de A est donnée par

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{1+2} \det A_{12} \\ (-1)^{2+1} \det A_{21} & (-1)^{2+2} \det A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs, et donc

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Finalement, la matrice inverse A^{-1} est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exemple de l'inverse (Exe 12, p. 210)

Calculez l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1} \det A_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} \det A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
C_{13} &= (-1)^{1+3} \det A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
C_{21} &= (-1)^{2+1} \det A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} \det A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Exemple de l'inverse (Exe 12, p. 210) (suite)

$$\begin{aligned}
C_{23} &= (-1)^{2+3}\det A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
C_{31} &= (-1)^{3+1}\det A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \\
C_{32} &= (-1)^{3+2}\det A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \\
C_{33} &= (-1)^{3+3}\det A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4
\end{aligned}$$

La matrice des cofacteurs est donc

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemple de l'inverse (Exe 12, p. 210) (suite)

La matrice adjointe de A est la transposée de la matrice des cofacteurs

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de A peut être calculé avec $A(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\, I,$$

D'où $\det A = 5$. Finalement, l'inverse de A est $A^{-1} = (1/\det A)\operatorname{adj} A$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/5 & -1/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

Aire et volume (p. 205)

Théorème (9)

Si A est une matrice carrée d'ordre 2, l'aire du parallélogramme déterminé par les colonnes de A est égale à $|\det A|$.

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, le volume du parallélépipède déterminé par les colonnes de A est égal à $|\det A|$.

Exemples :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Aire et volume d'une transformation (p. 207)

Théorème (10)

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une transformation linéaire déterminée par une matrice* A *de taille* 2×2. *Si* S *est un parallélogramme de* $\mathbb{R}^2$, *alors*

$$\{\textit{aire de } T(S)\} = |\det A| \times \{\textit{aire de } S\}.$$

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *une transformation linéaire déterminée par une matrice* A *de taille* 3×3. *Si* S *est un parallélépipède de* $\mathbb{R}^3$, *alors*

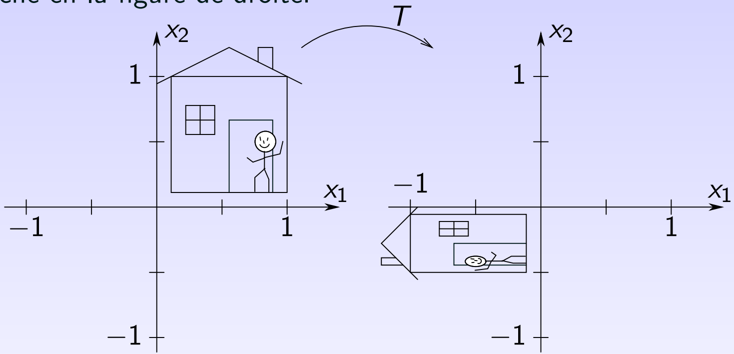
$$\{\textit{volume de } T(S)\} = |\det A| \times \{\textit{volume de } S\}.$$

Corollaire

Le théorème 10 reste valable lorsque S *est une région de* $\mathbb{R}^2$ *d'aire finie ou une région de* $\mathbb{R}^3$ *de volume fini.*

Exemple d'une transformation

Soit la transformatioon linéaire T qui transforme la figure de gauche en la figure de droite.



La matrice A de cette transformation linéaire T est donnée par

$$A = \left[\begin{array}{cc} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{array} \right].$$

Le déterminant de A est $-1/2$ et sa valeur absolue est $1/2$.

À retenir

- Résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par la règle de Cramer.

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(exemples 1 et 2, ex. 1 à 10)

- Définition et calcul de la matrice adjointe (exemple 3, ex. 11 à 16).
- Calcul du déterminant à partir de la matrice adjointe (idem).
- Inversion de matrice en utilisant la matrice adjointe (idem).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

- Aire d'un parallélogramme, volume d'un parallélipipède.
- Effet sur l'aire (et le volume) d'une transformation linéaire.