Série 2

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1-3. Déterminer toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $u'(t) + 2\tan(t)u(t) \;=\; \sin(t),\; t \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(2) $u'(t) + 2u(t) \;=\; 1 - t + e^{-2t} + \cos(2t),\; t \geq 0$

(3) $tu'(t) \;=\; u(t)\left(1 + \ln\left(\frac{u(t)}{t}\right)\right),\; t > 0.$

A faire PENDANT et APRES le cours :

Exercice 1. Déterminer toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $u'(t) \;=\; -u(t) + e^{2t} + e^{t} + 3\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(2) $(t-3)u'(t) - 3u(t) \;=\; t + 5, \quad t \in \,]3, \infty[$

Exercice 2. Trouver une fonction $v \in C^1(]0,\infty[)$ qui ne s'annule pas sauf pour $x = 1$ et qui vérifie :

$$\int_1^x v(t)\,dt = \frac{(v(x))^2}{x}, \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation de Ricatti

$$\begin{cases} y'(x) \;=\; y^2(x) - 2e^x y(x) + e^{2x} + e^x \\ y(0) \;=\; 0 \end{cases}$$

Indication : procéder au changement de variables $z(x) = y(x) - e^x$.

Exercice 4. Déterminer toutes les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants et précisant si ces solutions sont globales ou locales.

(1) $\begin{cases} u(t) + (t - u(t))\; u'(t) \;=\; 0,\; t \in \mathbb{R} \\ u(1) \;=\; \frac{1}{2} \end{cases}$

$$(2)\quad \begin{cases} u'(t) &= t^2\ (u(t))^3, \ t \in [0, \infty[\\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} u'(t) = t^4 + 2t - t^2 u(t), \quad t > 0, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer toutes les solutions du problème

$$\begin{cases} u'(t) &= \sqrt{u(t) + \sin(t)} - \cos(t), \ t > 0 \\ \lim_{t \to 0^+} u(t) &= 0. \end{cases}$$

Exercice 6. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $p, f \in C^0(I)$ et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Pour toutes conditions initiales $(t_0, u_0) \in \mathbb{I} \times R$, déterminer formellement l'unique solution de l'équation de Bernoulli

$$\begin{cases} u'(t) + p(t)u(t) &= f(t)u(t)^m \quad t \in I, \\ u(t_0) &= u_0. \end{cases}$$

Indication : Appliquer la technique de variation de la constante.