Série 3

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1-3. Déterminer toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $u''(t) - 4u(t) \;=\; 1 - 2t + 8e^{t} - e^{-t}, \; t \in \mathbb{R}$

(2) $u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) \;=\; e^{-3t} + \cos(2t), \; t \in \mathbb{R}$

(3) $t^2u''(t) + 4tu'(t) + (2 - t^2)u(t) \;=\; 0, \; t \in \mathbb{R},$
sachant que $u_1(t) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$ est une solution.

A faire PENDANT et APRES le cours :

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre

$$x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$$

sachant que l'équation homogène associée possède deux solutions qui sont de la forme $y(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1.) Vérifier que f satisfait l'équation

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}\,.$$

Exercice 3. Un corps de masse m tombe verticalement d'une certaine altitude. Sa vitesse initiale est nulle. De plus, on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de sa vitesse.

1.) Établir l'équation du mouvement et la résoudre.

2.) Déterminer la vitesse limite que peut atteindre ce corps.

Exercice 4. Soit une fonction continue $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

possède une suite de zéros qui tend vers $+\infty$ si la fonction q vérifie

$$\int_1^\infty q(x)dx = +\infty.$$

Exercice 5. Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle du 2^e ordre suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos \omega t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Résoudre

$$(1 + x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) \ = \ 1 + x + x^2$$

sachant que $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est une solution de l'équation homogène associée.

Exercice 7. Résoudre

$$f''(x) + f(-x) = x$$

Indication : Poser $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$ et chercher deux équations différentielles pour g et h.