EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2019

Série 9

Exercice 1. On a vu en cours qu'une application lineaire φ est une isometrie ssi sa matrice M_φ dans la base canonique est une matrice orthogonale : ${}^tM_\varphi = M_\varphi^{-1}$.

1. Donner deux preuves du fait plus general que φ est une isometrie ssi sa matrice $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ dans une base orthonormee $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.
   (a) En utilisant un exercice de la feuille precedente.
   (b) En montrant que ${}^tM_{\varphi,\mathcal{B}} = M_{\varphi,\mathcal{B}}^{-1}$ grace a un changement de base convenable (par une matrice orthogonale).
2. Montrer que cela est faux si on ne suppose pas que $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel reel abstrait de dimension finie $n \geqslant 1$ et muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$ (une forme bilineaire, symetrique, definie positive). Une base orthonormee est une familles de vecteurs $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_i$ tels que

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_V = \delta_{i,j}$$

et une isometrie lineaire est une application lineaire telle que $\forall \vec{v} \in V$,

$$\langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

1. Montrer que φ est une isometrie ssi la matrice $M_{\varphi,\mathcal{B}}$ de φ dans une base orthonormee (BO) $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale (ie. ${}^tM_{\varphi,\mathcal{B}} = M_{\varphi,\mathcal{B}}^{-1}$).
2. On considere la sphere de rayon 1 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{e} \in S^2$ un point. Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{0,\mathbf{e}}$ une isometrie fixant ce point. Montrer qu'il existe une BO $\mathcal{B}$ dont le premier vecteur est $\mathbf{e}$. Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$
ou la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, est orthogonale.

Exercice 3. On a vu en cours qu'une isometrie lineaire φ est speciale ou non-speciale si le determinant de sa matrices dans la base canonique vaut 1 ou -1.

1. Montrer qu'une isometrie lineaire φ est speciale ou non-speciale si le determinant de sa matrice dans une base quelconque (pas forcement orthonormee) vaut 1 ou -1.

Exercice 4. Soit $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul ; on rappelle que l'application

$$\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

est une isometrie : la symetrie par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^{\perp}$.

1. Montrer que $\vec{v}$ est un vecteur propre.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormee formee uniquement de vecteurs propres de $\varphi_{\vec{v}}$, ie. une base orthonormee $(\mathbf{e}_i)_{i \leqslant n}$ telle que

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

   (ne pas chercher tres loin).
3. Montrer que φ est non speciale.

Exercice 5. Pour chacune des matrices suivantes determiner si elles sont orthogonales et si elles sont speciales ou non.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & -12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ -12 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$