Série 9 : Corrigé

Exercice 2

ATTENTION : L'intérêt de cet exercice est de travailler dans un cadre plus général que $\mathbb{R}^n$ et ses isométries. Ici, V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, mais quelconque (par exemple des matrices).

1. On va d'abord montrer qu'avec cette définition des isométries, celles-ci préservent le produit scalaire : $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$
   Pour cela, on développe $\langle u+v, u+v \rangle$ de deux façons différentes :
   D'une part, $\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle$
   D'autre part, en utilisant la définition d'une isométrie et le fait qu'elle soit linéaire : $\langle u+v, u+v \rangle = \langle \varphi(u+v), \varphi(u+v) \rangle = \langle \varphi(u)+\varphi(v), \varphi(u)+\varphi(v) \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle + 2 \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$
   En égalisant les deux côtés de l'équation, on trouve $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.
   Remarquez qu'on a utilisé le fait que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de caractéristique 2, et que le produit scalaire est symétrique.

   On vient donc de montrer que φ est une isométrie si et seulement si elle préserve le produit scalaire. Maintenant, on montre l'énoncé :
   $\Rightarrow$: soit φ une isométrie et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de V, M la matrice de φ dans cette base. Alors M s'écrit, dans la base canonique : $M_0 = (\varphi(e_1)| \ldots |\varphi(e_n))$. Comme φ préserve le produit scalaire, M_0 est orthogonale. Par des résultats d'algèbre linéaire, $M = P.M_0.P^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, et P est orthogonale car $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc M est orthogonale.
   $\Leftarrow$: soit φ une application linéaire telle que sa matrice dans tout base orthonormée est orthogonale. Montrons que φ est une isométrie. On va montrer qu'elle préserve le produit scalaire :
   Considérons v et u deux vecteurs de V, et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de V. On écrit $u = \sum_i \alpha_i e_i, v = \sum_j \beta_j e_j$ Comme M dans $\mathcal{B}$ est orthogonale, $\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \delta_{ij}$ Alors :
   $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \left\langle \varphi(\sum_i \alpha_i e_i), \varphi(\sum_j \beta_j e_j) \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle e_i, e_j \rangle = \langle u, v \rangle$
2. On applique juste Gram-Schmidt pour trouver $\mathcal{B} = \{e, e_1, e_2\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (Remarquez que comme $e \in S^2$, sa norme vaut 1 !!)
   Comme $\varphi(e) = e$, on sait que la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ sera de la forme :

   $$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

   Mais cette matrice doit être orthogonale par rapport au produit scalaire standard ! (question précédente) Donc $x = y = 0$ et

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   est orthogonale dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1. Montrons que $\vec{v}$ est un vecteur propre de $\varphi_{\vec{v}}$:

   $\varphi_{\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{v} - 2\frac{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = -\vec{v}$.

   Donc $\vec{v}$ est un vecteur propre pour la valeur -1. C'est logique puisque $\varphi_{\vec{v}}$ est la symétrie par rapport à $\vec{v}^{\perp}$.
2. Tout d'abord, remarquons que comme $\varphi_{\vec{v}}$ est la symétrie par rapport à $\vec{v}^{\perp}$, tous les vecteurs de $\vec{v}^{\perp}$ sont fixes par $\varphi_{\vec{v}}$. En effet, $\forall\ \vec{u} \in \vec{v}^{\perp}$ $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ dans la formule de $\varphi_{\vec{v}}$. Donc ce sont des vecteurs propres pour la valeur propre 1. Ensuite, par l'exercice 3 de la série 8, $\mathbb{R}^n = span(\vec{v}) \oplus \vec{v}^{\perp}$, donc $dim(\vec{v}^{\perp}) = n-1$, et en utilisant Gram-Schmidt, on trouve une BOn de n-1 vecteurs de $\vec{v}^{\perp}$, qu'on appelle $\mathcal{B}' = \{e_2, ..., e_n\}$. En particulier, $\mathcal{B}' \subset \vec{v}^{\perp}$, donc $\vec{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{B}'$. On pose donc : $\mathcal{B} = \{e_1\} \cup \mathcal{B}'$ où $e_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et on a notre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de $\varphi_{\vec{v}}$.
3. On veut montrer que $\varphi_{\vec{v}}$ est non-spéciale, donc que le déterminant de sa matrice dans une base orthonormée vaut -1 (cf exercices précédents). Or on vient de créer une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$! Si on l'utilisait ? Etudions M la matrice de $\varphi_{\vec{v}}$ dans cette base $\mathcal{B}$. Les colonnes de M sont :

   $\left(\varphi_{\vec{v}}(e_1) \middle| ... \middle| \varphi_{\vec{v}}(e_n)\right)_{\mathcal{B}} = (-e_1 | \, e_2 \, |e_3| ... |e_n)_{\mathcal{B}} = (-e_{0,1} | \, e_{0,2} \, |e_{0,3}| ... |e_{0,n})$.

   Donc son determinant est -1, donc elle est non-spéciale.