EPFL 3 Juillet 2018
Géométrie II, MATH-125

Examen

Nom : Prénom : No SCIPER :

Consignes :

— **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées**
— **Le formulaire standard est autorisé.**
— **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
— **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
— **L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**
— **Toutes les réponses doivent être rédigées sur la copie et PAS sur le sujet d'examen. Les feuilles de brouillon ne sont PAS acceptées comme copies.**
— **En plus du Nom, Prenom, SCIPER inscrit obligatoirement sur la première feuille, chaque feuille de la copie doit comporter au moins un signe permettant votre identification (Nom, SCIPER, initiales,...)**
— **Les feuilles de votre copie doivent être retournées dans le texte de l'examen qui servira de chemise.**

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Enoncer la formule de Burnside.
2. Pour chacun des deux pavages ci-dessous (cf. Figures 1 et 2),
   (a) Donner (sous la forme p??) le type du groupe des rotations affines préservant ce pavage,
   (b) Existe-t-il des symétries préservant le pavage (si il y en a preciser si elles ne sont que glissées ou si il en existe des axiales) ?
3. (VRAI ou FAUX ?) Il existe un pavage du plan dont le groupe des isométries contient un élément ordre 5.
4. (VRAI ou FAUX ?) Les stabilisateurs de tous les points d'un ensemble sur lequel agit un groupe sont isomorphes.
5. (VRAI ou FAUX ?) Soit r_0 la rotation linéaire d'angle $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'axe $\mathbb{R}.(1,2,3)$ et $\vec{v}=(3,1,-1)$. Alors $t_{\vec{v}} \circ r_0$ est d'ordre 8.

Exercice 2. Soient $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. On considère la transformation de l'espace donnée dans la base canonique par $\varphi(x,y,z)=(X,Y,Z)$ avec

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{d}(\ ax+y-2z)+e \\ Y &= \frac{1}{d}(-2x+2y+bz)+2 \\ Z &= \frac{1}{d}(\ x+\ cy+\ 2z)+f \end{aligned}$$

1. Décrire l'ensemble des $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^5$ tels que φ est un vissage.
2. Même question en demandant que φ soit une anti-rotation.
3. Si φ n'est pas un vissage montrer que $\varphi^{2016} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
4. Calculer φ^{2016} is $e=-2$ et $f=2$.

Exercice 3 (Autour du Théorème Orbites-Stabilisateurs)**.** Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ un groupe d'isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On suppose que :

– *Il existe trois points non-alignés $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ dont les orbites $G.P_1, G.P_2, G.P_3$ sont finies.*

On veut montrer que G est fini.

1. Soit $g \in G$ tel que
$$g.P_1 = P_1,\ g.P_2 = P_2,\ g.P_3 = P_3.$$
Quelles sont les valeurs possibles de g ?
2. On note $G_{(P_1,P_2,P_3)}, G_{(P_1,P_2)}, G_{P_1} \subset G$ les sous-ensembles de G qui stabilisent *individuellement* les points (P_1, P_2, P_3), (P_1, P_2) et P_1. Par exemple
$$G_{(P_1,P_2)} = \{g \in G,\ \text{tel que } g.P_1 = P_1 \text{ et } g.P_2 = P_2\}...$$
Montrer que ce sont des sous-groupes de G.
3. Montrer successivement que $G_{(P_1,P_2,P_3)}, G_{(P_1,P_2)}, G_{P_1}$ sont finis et enfin que G est fini.
4. On sait donc que G est fini et donc que toute orbite $G.P$ d'un point P est finie. Montrer qu'il existe une infinité de points $P \in \mathbb{R}^3$ tel que $G.P$ est de cardinal $|G|$ exactement.

Dans les deux derniers exercices, on étudie les quaternions de Hamilton qui permettent de décrire les isométries de l'espace un peu de la même manière que les nombres complexes permettent de décrire les isométries du plan.

Exercice 4 (Les quaternions de Hamilton I)**.** Soit $M_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices 2×2 a coefficients complexes ; on note $\mathbf{0}$ la matrice nulle et Id la matrice identité. On considère dans $M_2(\mathbb{C})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$$\mathbb{H} = \mathbb{R}.\mathrm{Id} + \mathbb{R}.I + \mathbb{R}.J + \mathbb{R}.K$$
avec
$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
C'est l'espace des *quaternions de Hamilton* et un element de cet ensemble
$$Z = t\mathrm{Id} + xI + yJ + zK,\ x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

est appelé un quaternion. Le sous-espace $\mathbb{R}.\mathrm{Id}$ est l'espace des quaternions scalaires et son supplémentaire

$$\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}.I + \mathbb{R}.J + \mathbb{R}.K$$

est l'espace des quaternions imaginaires.

Les quaternions sont munis d'une "conjugaison complexe"

$$Z \mapsto \overline{Z} = t\mathrm{Id} - xI - yJ - zK$$

qui est $\mathbb{R}$-lineaire.

Si Z est un quaternion (donc une matrice) on note $\mathrm{tr}(Z)$ et $\det(Z)$ sa trace et son déterminant.

1. Calculer
$$I^2,\ J^2,\ K^2,\ I.J,\ J.I,\ I.K,\ K.I,\ J.K,\ K.J.$$
2. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par produit dans $M_2(\mathbb{C})$; c'est donc une $\mathbb{R}$-algèbre. On note $\mathbb{H}^\times$ le groupe multiplicatif des quaternions inversibles.
3. Soit $Z = t\mathrm{Id} + xI + yJ + zK$ un quaternion. Montrer que
$$\mathrm{tr}(Z) = 2t,\ \det(Z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$
Vérifier que pour Z' un autre quaternion, on a
$$\overline{Z.Z'} = \overline{Z'}.\overline{Z}.$$
4. Montrer que
$$\mathbb{H}_0 = \{Z \in \mathbb{H},\ Z + \overline{Z} = \mathbf{0}\} = \ker(\mathrm{tr}).$$
5. Montrer que $Z \in \mathbb{H}$ est inversible (comme matrice) si et seulement si $Z \neq \mathbf{0}$ (ie. $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{\mathbf{0}\}$) et montrer qu'alors
$$Z^{-1} = \frac{1}{\det(Z)}\overline{Z} \in \mathbb{H}^\times.$$
6. Soit l'application
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}} := \begin{array}{ccc} \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \mapsto & \mathbb{R} \\ (W, W') & \mapsto & \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W\overline{W'}) \end{array}.$$
Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{H}$, la fonction longueur $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2$ est donnée par
$$\|W\|_{\mathbb{H}}^2 = \langle W, W\rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W\overline{W}) = \det(W) \tag{0.1}$$

et que l'isomorphisme linéaire

$$q : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto t.\mathrm{Id} + xI + yJ + zK \in \mathbb{H}$$

identifie l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^4})$ avec l'espace euclidien $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}})$ de sorte que pour $\vec{w} = (x, y, z, t)$, $\vec{w}' = (x', y', z', t')$ et

$$q(\vec{w}) = t.\mathrm{Id} + x.I + y.J + z.K,\ q(\vec{w}') = t'.\mathrm{Id} + x'.I + y'.J + z'.K$$

on a

$$\langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle_{\mathbb{R}^4} = xx' + yy' + zz' + tt' = \langle q(\vec{w}), q(\vec{w}') \rangle_{\mathbb{H}}\ .$$

Cet isomorphisme identifie également l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ (vu comme le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ des vecteurs de la forme $(x, y, z, 0)$) avec l'espace des quaternions imaginaires $\mathbb{H}_0$.

7. Soit $Z \in \mathbb{H}^\times$, $Z \neq \mathbf{0}$ un quaternion non-nul, on considère l'application

$$\mathrm{Ad}_Z : \begin{array}{ccc} \mathbb{H}_0 & \mapsto & \mathbb{H} \\ W & \mapsto & \mathrm{Ad}_Z(W) = Z.W.Z^{-1} \end{array}.$$

Montrer que Ad_Z est linéaire et que son image est contenue dans $\mathbb{H}_0$ (on pourra se souvenir que $\mathbb{H}_0 = \ker(\mathrm{tr})$.) Montrer que Ad_Z est inversible en donnant sont inverse.

8. Montrer que pour tout $W \in \mathbb{H}_0$ on a

$$\langle \mathrm{Ad}_Z(W), \mathrm{Ad}_Z(W) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle W, W \rangle_{\mathbb{H}}$$

et en déduire que

$$\mathrm{Ad} : Z \in \mathbb{H}^\times \mapsto \mathrm{Ad}_Z \in \mathrm{GL}(\mathbb{H}_0)$$

définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}^\times, \times)$ vers $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}_0)_0$ (le groupe des isometries linéaires de l'espace $\mathbb{H}_0$ equipé du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$).

9. Montrer que $\ker(\mathrm{Ad})$ contient $\mathbb{R}^\times.\mathrm{Id}$ le groupe des quaternions scalaires inversibles.

Exercice 5 (Les quaternions de Hamilton II)**.** Dans ce dernier exercice, on veut déterminer la nature de l'isométrie Ad_Z de $\mathbb{H}_0$ pour $Z \in \mathbb{H}^\times - \mathbb{R}^\times.\mathrm{Id}$ (on suppose que Z est non-scalaire car sinon $\mathrm{Ad}_Z = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}_0}$).

On pourra utiliser librement les résultats et formules de l'exercice précédent (par exemple (0.1) .) Il est également fortement conseillé de faire des calculs intrisèques basés sur les propriétés algébriques des quaternions vus dans l'exercice précédent plutôt que d'avoir recourt à des calculs explicites dans les coordonnées de la base de $\mathbb{H}$ (Id, I, J, K).

On dit qu'un quaternion $\imath$ est unitaire si

$$\|\imath\|_{\mathbb{H}}^2 = \det(\imath) = 1.$$

On note $\mathbb{H}^{(1)}$ l'ensemble des quaternions unitaires et $\mathbb{H}_0^{(1)}$ ceux qui sont imaginaires.

1. Montrer que tout quaternion non-nul est proportionnel (par un facteur réel) à un quaternion unitaire.
2. Soit $\imath, \jmath \in \mathbb{H}_0^{(1)}$ deux quaternions unitaires imaginaires. On suppose de plus que $\imath$ et $\jmath$ sont orthogonaux (ie. $\langle \imath, \jmath \rangle_{\mathbb{H}} = 0$) et on pose

$$k = \imath.\jmath.$$

   Montrer que k est également unitaire imaginaire, que $(\imath, \jmath, k)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{H}_0$. Pour cela on pourra montrer que

$$\imath^2 = \jmath^2 = k^2 = -\mathrm{Id}, \;\; \imath.\jmath = -\jmath.\imath = k.$$

3. Soit $Z \in \mathbb{H}^{(1)}$ un quaternion unitaire non-scalaire. On ecrit Z sous la forme

$$Z = c.\mathrm{Id} + s.\imath, \text{ avec } c, s \in \mathbb{R} \text{ et } \imath \text{ imaginaire unitaire.}$$

   Montrer que $c^2 + s^2 = 1$, que $\mathrm{Ad}_Z(\imath) = \imath$ et calculer la matrice de Ad_Z dans la base $(\imath, \jmath, k)$ discutée ci-dessus.
4. En déduire que Ad_Z est une rotation de $\mathbb{H}_0$ dont on donnera l'axe et l'angle.
5. Montrer que réciproquement toute rotation de $\mathbb{H}_0$ est de la forme Ad_Z pour Z un quaternion unitaire.
6. Donner un quaternion Z tel que Ad_Z corresponde dans $\mathbb{R}^3$ à la rotation d'axe $(1, 1, 1)$ et d'angle $\pi/4$ radians.
7. Montrer que $\ker(\mathrm{Ad}) = \mathbb{R}^\times.\mathrm{Id}$ et qu'on a un isomorphisme de groupes

$$\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times.\mathrm{Id} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

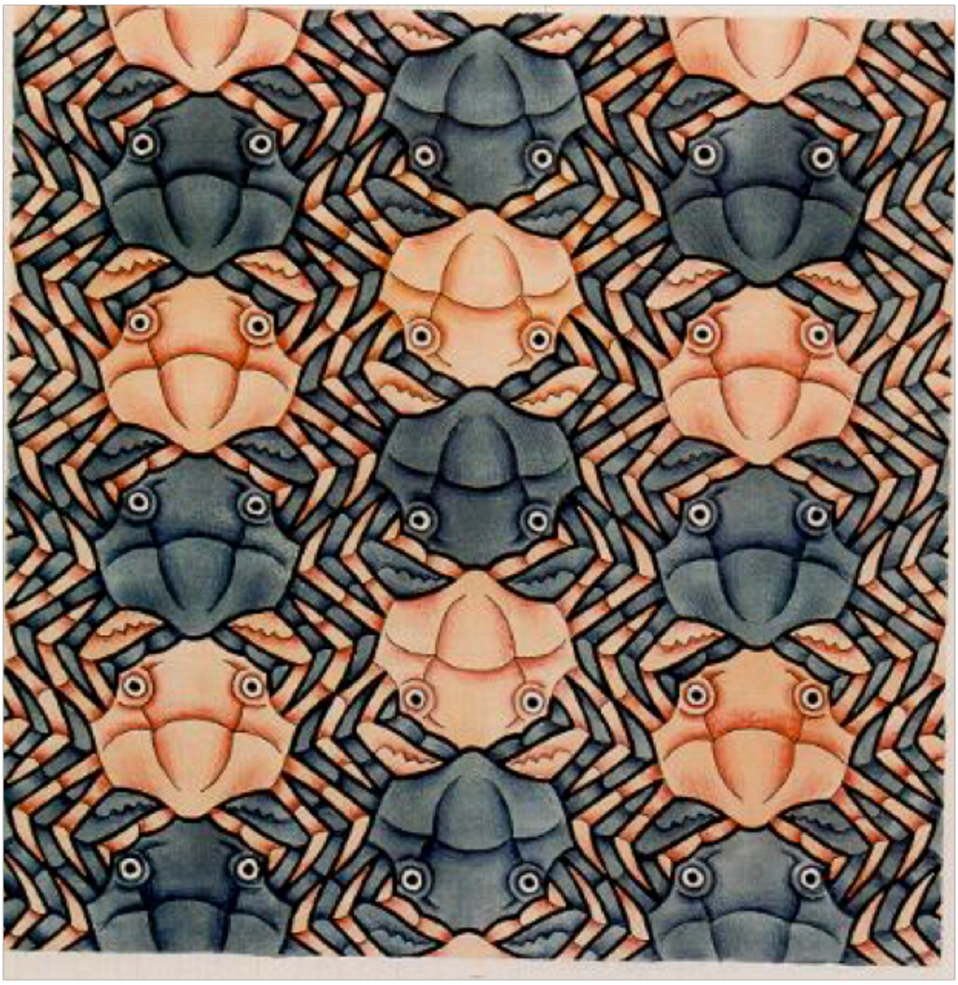

Figure 1 – Crabes

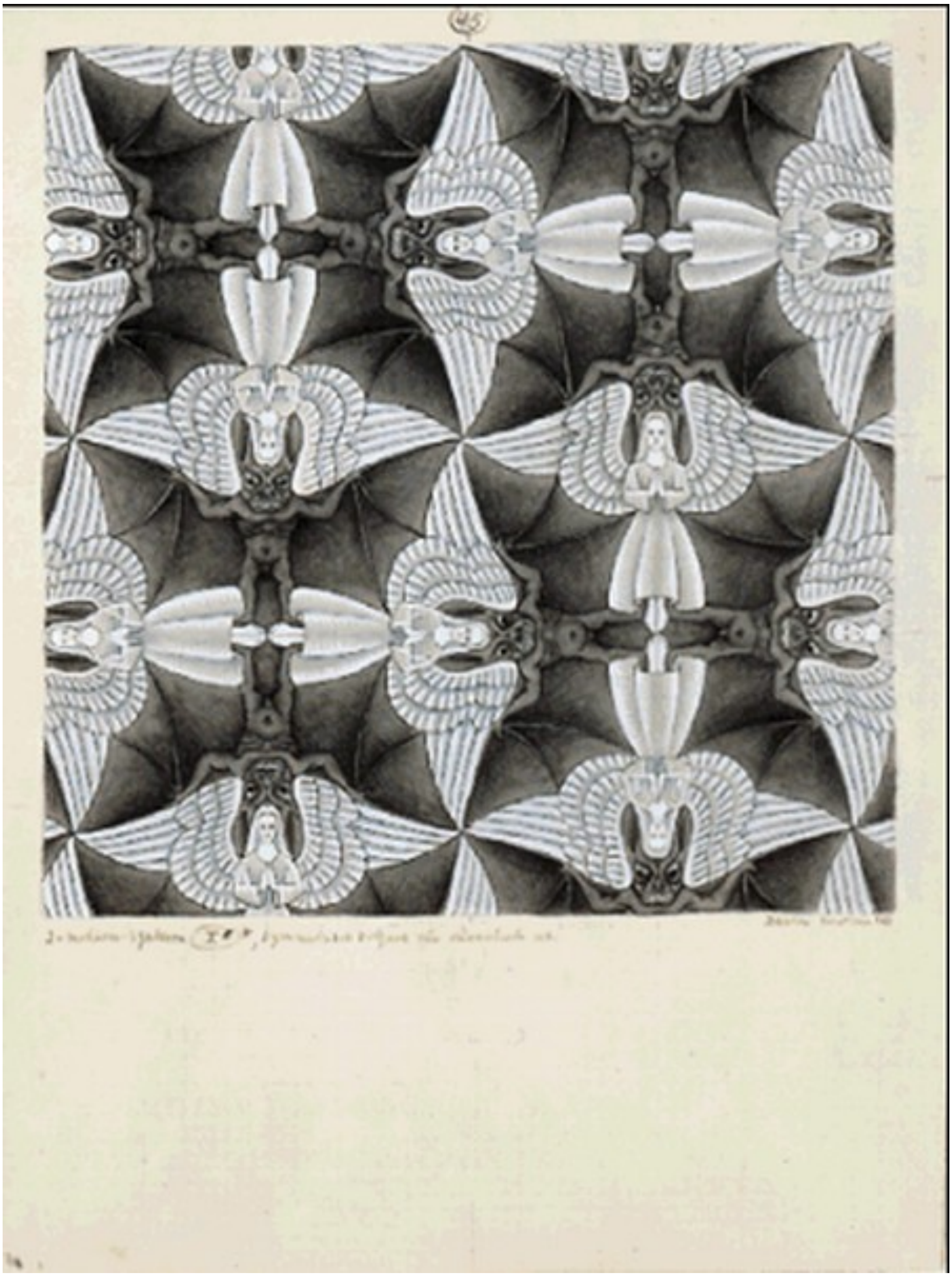

FIGURE 2 – Anges