EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-120

Solutions série 8

Solution 1. 1. On a que

$$\langle \varphi(\mathbf{e}_{0,i}), \mathbf{e}_{0,j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} \langle \mathbf{e}_{0,k}, \mathbf{e}_{0,j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} \delta_{k,j} = x_{j,i}$$

2. Par un calcul similaire au point 1, on a que $x^*_{i,j} = \langle \mathbf{e}_{0,i}, \varphi^*(\mathbf{e}_{0,j}) \rangle$. Et donc, par definition de l'adjointe, on obtient que $\langle \mathbf{e}_{0,i}, \varphi^*(\mathbf{e}_{0,j}) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{e}_{0,i}), \mathbf{e}_{0,j} \rangle$. On conclut donc grace au point 1.
3. Pour les prochains calculs, on notera par φ et ψ les applications lineaires associees a M et N respectivement,
   — On montre que $\varphi^* + \psi^* = (\varphi + \psi)^*$: Soient $v, w \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle (\varphi+\psi)(v), w \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle + \langle \psi(v), w \rangle = \langle v, \varphi^*(w) \rangle + \langle v, \psi^*(w) \rangle = \langle v, (\varphi^* + \psi^*)(w) \rangle$$

   Ainsi, par unicite de l'adjointe, $\varphi^*(w) + \psi^*(w) = (\varphi^* + \psi)^*(w)$. On conclut donc en passant des applications lineaires aux matrices
   — On montre que $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$: Soient $v, w \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle (\varphi \circ \psi)(v), w \rangle = \langle \psi(v), \varphi^*(w) \rangle = \langle v, (\psi^* \circ \varphi^*)(w) \rangle$$

   On conclut donc que $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$, et on finit en passant aux matrices.
   — C'est une consequence immediate du point 2
4. On renomme les trois propositions (A), (B) et (C) (c'est a dire (A) = φ est une isometrie lineraire, etc...).
   On sait, par le cours, que φ est une isometrie lineaire ssi elle conserve le produit scalaire (et donc son inverse aussi). Ainsi, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$

   $$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \varphi^{-1}(\varphi(u)), \varphi^{-1}(v) \rangle = \langle u, \varphi^{-1}(v) \rangle$$

   On a donc montre que (A) implique (B). L'equivalence entre (B) et (C) est directe par le point 2. Enfin, supposons (B), on a que, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, \varphi^{-1}(\varphi(v)) \rangle = \langle u, v \rangle$$

   Ainsi, φ conserve le produit scalaire, et donc c'est une isometrie lineaire (on a donc (A)). $\square$

Solution 3. 1. Soit $a, b \in V^\perp$, $w \in V, \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$
$\to \langle \lambda a + \mu b, w\rangle = \lambda\langle a, w\rangle + \mu\langle a, w\rangle = 0 + 0 = 0$
On a donc que $V^\perp$ est bien un SEV de $\mathbb{R}^n$

2. Soit $v \in V \cap V^\perp$
Alors par definition, $\langle v, v\rangle = 0$ et donc $v = 0$. Comme $\langle 0, 0\rangle = 0$, on obtient que $V \cap V^\perp = \{0\}$

3. Supposons $\exists v \in \mathbb{R}^n - (V + V^\perp)$
Soit $\{v_i\}$ une base orthogonale de $V+V^\perp$. Alors $w = v - \sum_i \langle v, v_i\rangle$ est orthogonal a tous les v_i, et donc orthogonal a V et $V^\perp$. Il est donc dans $V \cap V^\perp = \{0\}$. Or, $w \neq 0$ car $(\{v_i\}, v)$ est une famille lineairement independante. On a donc une contradiction

4. Soit $\{v_i\}$ une base de V et $\{w_j\}$ une base de $V^\perp$. On construit, par Gram-Schmidt, $\{v_i'\}$, $\{w_j'\}$ respectivement deux bases orthonormees de V et $V^\perp$, et soit la BO obtenue en mettant les vecteurs des deux bases $\{v_i'\}$ et $\{w_j'\}$ (c'est bien une base car $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$, elle est orthogonale car $\{v_i'\}$ et $\{w_j'\}$ le sont et par definition de $V^\perp$, et finalement orthonormee car tous ses vecteurs sont unitaires).

5. $\varphi(V) = V$ car φ est une application lineaire bijective (c'est une isometrie), donc en particulier injective ($\Rightarrow dim(ker(\varphi|_V)) = 0$). Ainsi, par le theoreme du rang, on a
$$dim(V) = dim(ker(\varphi|_V)) + dim(\varphi(V)) = dim(\varphi(V))$$
Du coup, $\varphi(V)$ est un SEV de V de meme dimension que lui, donc $\varphi(V) = V$
Montrons que $\varphi(V^\perp) \subseteq V^\perp$ et par le meme argument qu'avant on aura egalite :
Soit $w \in V^\perp, v \in V$, on a
$$\langle \varphi(w), v\rangle = \langle \varphi(w), \varphi(\varphi^{-1}(v))\rangle = \langle w, \varphi^{-1}(v)\rangle = 0$$
ou la derniere egalite vient du fait que $\varphi^{-1}(v) \in V$ (car $\varphi(V) = V$ et donc $V = \varphi^{-1}(V)$)
Ainsi, $\varphi(V^\perp) \subseteq V^\perp$

Solution 4. 1. On montre que cette application preserve le produit scalaire (et donc ce sera une isometrie lineaire).
Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$. On a que $\langle \varphi_v(w_1), \varphi_v(w_2)\rangle = \langle w_1 - 2\frac{\langle w_1, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, w_2 - 2\frac{\langle w_2, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\rangle$
$= \langle w_1, w_2\rangle - 2\langle w_1, v\rangle\langle w_2, v\rangle - 2\langle w_2, v\rangle\langle w_1, v\rangle + 4\langle w_1, v\rangle\langle w_2, v\rangle = \langle w_1, w_2\rangle$. Ainsi, φ_v est bien une isometrie.

2. Soit $\mathcal{B}$ une BO de $\mathbb{R}^n$ telle que les $n-1$ premiers vecteurs forment une base de $\langle v\rangle^\perp$ et telle que le dernier vecteur est $v/||v||$. On voit que (les calculs sont les

memes que dans $\mathbb{R}^2$) selon cette base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, cela ressemble beaucoup a une reflexion dans le sens ou cette application fixe l'hyperplan $\langle v \rangle^{\perp}$ et envoie le vecteur v sur $-v$.