Série 4

A préparer AVANT le cours :

Devoir 1,2. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} u_1'(t) = 12u_1(t) - 10u_2(t) \\ u_2(t) = 15u_1(t) - 13u_2(t) \\ u_1(0) = 4,\ u_2(0) = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) - u_2(t) \\ u_2(t) = 4u_1(t) - 5u_2(t) \\ u_1(0) = 2,\ u_2(0) = -1. \end{cases}$$

A faire PENDANT et APRES le cours :

Exercice 1. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) &+ 5x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) &- 2x_2(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales $x_1(0) = 11, x_2(0) = 1$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) &- 12x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 9x_1(t) &+ 11x_2(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales $x_1(0) = 3, x_2(0) = -2$.

Exercice 4. On considère l'équation :

$$x^{(4)}(t) - 2x^{(3)}(t) + 2x^{(2)}(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$

(1) Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution si et seulement si $X = (x, x', x^{(2)}, x^{(3)})^T$ est solution de

$$X' = AX$$

avec A à déterminer

(2) A est-elle diagonalisable ?

(3) Montrer qu'il existe P inversible telle que $PAP^{-1} = B$, avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.

(4) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel Euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E. Résoudre l'équation :

$$\vec{x}'(t) = \vec{u} \times \vec{x}(t).$$

Exercice 6. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + \sin(3x(t) - y(t)) \\ y'(t) &= e^{x(t)} - 1 \end{aligned}$$

(1) Justifier l'existence d'une unique solution maximale. On notera I l'intervalle de définition de cette solution.

(2) Déterminer les points d'équilibre de l'équation différentielle.

(3) Etudier la stabilité de ces points d'équilibre.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Calculer $\exp(tA)$.