Corrigé 1

Exercice 1.

Montrons que le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = (u(t))^2 - 5u(t) + 6 & \text{si } t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

a une solution globale pour $u_0 \leq 3$ et une solution maximale non globale sinon.

Démonstration : Puisque $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, on obtient par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

et par suite

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)-3} - \frac{\dot{u}(t)}{u(t)-2} = 1.$$

En intégrant les deux côtés de cette égalité, on obtient (en supposant $u(t) \neq 2$ et $u(t) \neq 3$) :

$$\begin{aligned} \ln|u(t)-3| - \ln|u(t)-2| = \ln\left|\frac{u(t)-3}{u(t)-2}\right| &= t + C \\ \Rightarrow \left|\frac{u(t)-3}{u(t)-2}\right| &= e^t \cdot e^C \end{aligned}$$

Ce qu'on peut encore écrire

$$\frac{u(t)-3}{u(t)-2} = e^t \cdot D$$

avec une constante D qui peut être négative ou positive. Puisqu'on veut $u(0) = u_0$, on a

$$D = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{3 - 2e^t\left(\frac{u_0-3}{u_0-2}\right)}{1 - e^t\left(\frac{u_0-3}{u_0-2}\right)}. \tag{1}$$

Discussion :

Cas 1: Si $\underline{u_0 < 2}$ alors

$$\begin{array}{rrcl} & 1 & < & \dfrac{u_0-3}{u_0-2} \leq e^t\left(\dfrac{u_0-3}{u_0-2}\right), \quad \forall t \in [0,\infty[, \\ \Rightarrow & 0 & > & 1-e^t\left(\dfrac{u_0-3}{u_0-2}\right), \end{array}$$

et ainsi le dénominateur de $u(t)$ ne s'annule jamais. La solution (1) est donc une solution globale.

Cas 2: Si $\underline{u_0 = 2}$ alors $u(t) = 2, \ \forall t \in [0,\infty[$ est une une solution globale. Idem pour $\underline{u_0 = 3}$.

Cas 3: Si $\underline{u_0 \in]2,3[}$ alors

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & \geq & \dfrac{u_0-3}{u_0-2} \geq e^t\left(\dfrac{u_0-3}{u_0-2}\right), \quad \forall t \in [0,\infty[, \\ \Rightarrow & 1 & \leq & 1-e^t\left(\dfrac{u_0-3}{u_0-2}\right), \end{array}$$

et ainsi le dénominateur de $u(t)$ ne s'annule jamais. La solution (1) est donc une solution globale.

Cas 4: Si $\underline{u_0 > 3}$ alors on pose $\bar{t} = \ln\left(\frac{u_0-2}{u_0-3}\right)$ et on a

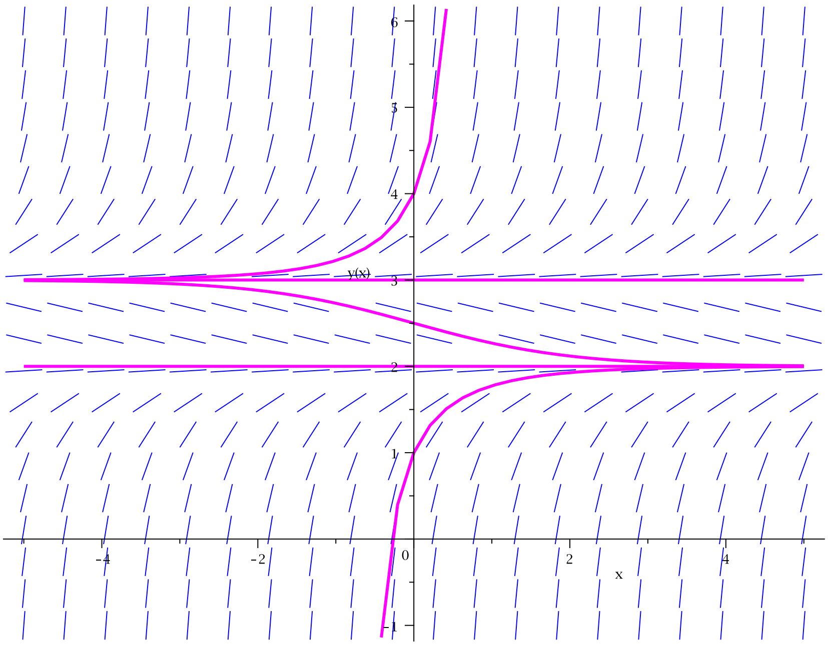
$$1 > \frac{u_0-3}{u_0-2} \ \text{ et } \ 1 - \frac{u_0-3}{u_0-2}e^{\bar{t}} = 0.$$

Ainsi la solution (1) explose lorsque $t \to \bar{t}$. C'est une solution maximale sur $[0,\bar{t}[$.

On peut vérifier facilement au moyen de (1) que $u(t)-2$ et $u(t)-3$ ne s'annulent pas, pour les cas 1,3,4, dans le domaine de définition de u.

La figure ci-dessous donne un aperçu des solutions en fonction de u_0. L'axe des abscisse représente t, l'axe des ordonnées représente x. Les petits traits donnent $f(t,x)$ et donc la pente d'une solution $u(t)$ qui passerait par ce point.

On a représenté les solutions pour $u_0 = 1, 2, 2.5, 3$ et 4. On peut se convaincre qu'aucune de ces solutions n'intersecte l'un des axes $x = 2$ ou $x = 3$.



Exercice 2.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in]0, \infty[, \qquad\qquad u(0) = u_0,$$

avec $f(t, x) = \dfrac{t^4 + 1}{t^4 - 1}$, $t \in]0, \infty[$. Ce problème revient à résoudre l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = \frac{t^4 + 1}{t^4 - 1}, \qquad u(0) = u_0.$$

Il faut donc trouver une primitive de $\dfrac{t^4 + 1}{t^4 - 1}$.

Décomposons $\dfrac{t^4 + 1}{t^4 - 1}$ en éléments simples. Puisque $t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1) = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)$, on recherche des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ω tels que :

$$\frac{t^4 + 1}{t^4 - 1} = \alpha + \frac{\beta}{t + 1} + \frac{\gamma}{t - 1} + \frac{\delta t + \omega}{t^2 + 1}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur $t^4 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} t^4 + 1 &= (t^4 - 1)\alpha + (t - 1)(t^2 + 1)\beta + (t + 1)(t^2 + 1)\gamma + (t^2 - 1)(\delta t + \omega) \\ &= \alpha(t^4 - 1)) + \beta(t^3 - t^2 + t - 1) + \gamma(t^3 + t^2 + t + 1) + \delta(t^3 - t) + \omega(t^2 - 1). \end{aligned}$$

En égalisant les coefficients des différentes puissances de t, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
(4) :& \qquad 1 = \alpha, \\
(3) :& \qquad 0 = \beta + \gamma + \delta, \\
(2) :& \qquad 0 = -\beta + \gamma + \omega, \\
(1) :& \qquad 0 = \beta + \gamma - \delta, \\
(0) :& \qquad 1 = -\alpha - \beta + \gamma - \omega.
\end{aligned}$$

De (4), on obtient $\alpha = 1$, de $(3) - (1)$, on obtient $\delta = 0$. En ré-écrivant le système, on obtient :

$$\begin{aligned}
(3') :& \qquad 0 = \beta + \gamma, \\
(2') :& \qquad 0 = -\beta + \gamma + \omega, \\
(0') :& \qquad 2 = -\beta + \gamma - \omega.
\end{aligned}$$

De $(2') - (0')$, on tire $\omega = -1$ et on aboutit alors au système :

$$\begin{aligned}
(3'') :& \qquad 0 = \beta + \gamma, \\
(2'') :& \qquad 1 = -\beta + \gamma,
\end{aligned}$$

d'où on tire finalement, $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. La décomposition en éléments simples donne alors :

$$\frac{t^4+1}{t^4-1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t^2+1}.$$

Les intégrales de l'équation différentielle s'expriment donc comme :

$$u(t) = t - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1-t) - \mathrm{Arctan}(t) + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$. En tenant compte de la condition initiale, on obtient $u(0) = C = u_0$. On a n'a donc pas une solution globale, mais une solution maximale définie sur l'intervalle$]0, 1[$ qui explose pour $t = 1$.

Exercice 3.

Rappelons que

$$u \in C^1([t_0, +\infty[) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u \in C^1(]t_0, +\infty[) \\ \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ >}} \dot{u}(t) \;=\; \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ >}} \dfrac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après un théorème du cours d'analyse I, basé sur le théorème de la valeur intermédiaire, si la première limite existe, alors elle est nécessairement égale à la seconde.

Montrons donc que $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ >}} \dot{u}(t) = f(t_0, u(t_0))$.

Par définition, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si :

$$\forall (\bar{t}, \bar{x}) \in I \times \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |f(t,x) - f(\bar{t}, \bar{x})| \leq \epsilon,\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}, |t - \bar{t}| + |x - \bar{x}| \leq \delta.$$

Soit donc $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tq

$$|f(t,x) - f(t_0, u(t_0))| \leq \epsilon,\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}, |t - t_0| + |x - u(t_0)| \leq \delta.$$

Puisque u est continue en t_0, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$|u(t) - u(t_0)| \leq \frac{\delta}{2},\ \forall t \in I, |t - t_0| \leq \gamma.$$

Ainsi, si $|t - t_0| \leq min(\gamma, \frac{\delta}{2})$, on a

$$|f(t, u(t)) - f(t_0, u(t_0))| \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ >}} f(t, u(t)) = f(t_0, u(t_0))$$

et donc que $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ >}} \dot{u}(t)$ existe.

<u>Exercice 4.</u>

Soit $t \in I$, $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(t, \cdot)$ sur l'intervalle $[x, y]$, on obtient l'existence de $z \in]x, y[$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{f(t,x) - f(t,y)}{x - y} &= \frac{\partial}{\partial x} f(t,z) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad (f(t,x) - f(t,y))(x - y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t,z)(x-y)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Si on pose $\ell(t) \equiv 0,\ \forall t \in I$, par le théorème 3.7 du cours, on peut conclure que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f\left(t, u(t)\right), & t \in I, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

a une solution globale unique.

<u>Exercice 5.</u>

En effet :

$$\begin{aligned}
v'(t) &= u'(t) - u_0'(t) \\
&= p(t)u(t)^2 + q(t)u(t) + f(t) - u_0'(t) \\
&= p(t)(v(t) + u_0(t))^2 + q(t)(v(t) + u_0(t)) + f(t) - u_0'(t) \\
&= p(t)v^2(t) + 2p(t)v(t)u_0(t) + p(t)u_0^2(t) + q(t)v(t) + q(t)u_0(t) + f(t) - u_0'(t) \\
&= p(t)v^2(t) + 2p(t)v(t)u_0(t) + q(t)v(t) + [p(t)u_0^2(t) + q(t)u_0(t) + f(t) - u_0'(t)] \\
&= p(t)v^2(t) + [2p(t)u_0(t) + q(t)]v(t)
\end{aligned}$$

Exercice 6.

(1) En effet, en dérivant les deux membres de l'équation de Clairaut par rapport à t, on obtient que, $\forall t \in I$:

$$v'(t) = v'(t) + tv''(t) + f'(v'(t))v''(t)$$

ou encore

$$0 = v''(t)(t + f'(v'(t))).$$

(2) Soit $v \in C^2(\mathbb{R})$ une solution de l'équation de Clairaut. On doit avoir

$$0 = v''(t)(t + f'(v'(t))) = v''(t)(t + 2v'(t)).$$

En intégrant, ceci donne les deux possibilités suivantes :

$$v(t) = at + b \quad \text{ou} \quad v(t) = -\frac{t^2}{4} + C$$

Pour que la fonction $v(t) = at + b$ soit solution, on doit avoir nécessairement :

$$v(t) = tv'(t) + (v'(t))^2 = at + a^2 \quad \Rightarrow \quad b = a^2$$

De même, pour que la fonction $v(t) = -\frac{t^2}{4} + C$ soit solution, on doit avoir nécessairement :

$$v(t) = tv'(t) + (v'(t))^2 = -\frac{t^2}{4} + C \Rightarrow C = 0$$

Il n'y a pas d'autre solution de l'équation de Clairaut qui soient $C^2(\mathbb{R})$. Mais il existe des solutions qui sont seulement dans $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7.

(1) Puisque $(\mathrm{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors par le théorème de la valeur intermédiaire, nous avons directement

$$|\mathrm{Arctan}(t\,y) - \mathrm{Arctan}(t\,z)| \leq 1 \cdot |t\,y - t\,z| = |t||y - z|$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et assurer l'existence d'une solution maximale de l'équation différentielle avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.

(2) Soit $y_{\max} : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale de cette équation différentielle, avec condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Nous avons directement

$$|y'_{\max}(t)| = |\mathrm{Arctan}(t\,y_{\max}(t))| \leq \frac{\pi}{2}.$$

(b) Puisque $y_{\max} \in C^1(J)$, alors nous pouvons écrire

$$\int_{t_0}^{t} y'_{\max}(s)ds \;=\; y_{\max}(t) - y_{\max}(t_0), \quad \forall\, t \in J,$$

d'où, par le point précédent,

$$|y_{\max}(t)| \leq |y_{\max}(t_0)| + \left| \int_{t_0}^{t} y'_{\max}(s)ds \right| \leq |y_{\max}(t_0)| + \frac{\pi}{2}|t - t_0|.$$

Si J est borné, alors $y_{\max}$ est borné.

(c) Comme la solution est bornée sur tout compact $[t_0, t_0 + \epsilon]$, elle n'explose pas, et elle est donc prolongeable sur tout $\mathbb{R}$.