Corrigé 2

Exercice 1.

(1) Une solution particulière de l'équation est de la forme

$$v(t) = \alpha\, e^{2t} + \beta\, e^{t} + \gamma \sin t + \delta \cos t.$$

En calculant $v'(t)$, on obtient

$$v'(t) = 2\alpha\, e^{2t} + \beta\, e^{t} + \gamma \cos t - \delta \sin t.$$

Ainsi

$$v'(t) + v(t) = 3\alpha\, e^{2t} + 2\beta\, e^{t} + (\gamma + \delta) \cos t + (\gamma - \delta) \sin t.$$

En identifiant avec l'expression donnée, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\alpha &=& 1, \\ 2\beta &=& 1, \\ \gamma+\delta &=& 0, \\ \gamma-\delta &=& 3. \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 1/3, \\ \beta &=& 1/2, \\ \delta &=& -3/2, \\ \gamma &=& 3/2. \end{array}\right.$$

D'où une solution particulière

$$v(t) = \frac{1}{6}\left(2e^{2t} + 3e^{t} - 9 \cos t + 9 \sin t\right).$$

D'autre part, les solutions générales de l'équation homogène sans second membre $\dot{w}(t) = -w(t)$ sont données par

$$w(t) = ce^{-t}, \qquad \text{où } c \text{ est une cste } \in \mathbb{R}.$$

Ainsi les intégrales demandées ont la forme

$$u(t) = c\, e^{-t} + \frac{1}{6}\left(2e^{2t} + 3e^{t} - 9 \cos t + 9 \sin t\right).$$

(2) L'équation sans second membre s'écrit

$$w'(t) - \frac{3}{t-3}\, w(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{3}{t-3},$$

ce qui implique en intégrant

$$\begin{aligned} \ln(w(t)) &= 3\ln(t-3)+C, \quad t>3, \\ \Leftrightarrow \quad w(t) &= e^C(t-3)^3 = \alpha(t-3)^3, \quad \text{où } \alpha = e^C. \end{aligned}$$

En faisant varier la constante α, on pose $u(t) = \alpha(t)(t-3)^3$ et ainsi

$$u'(t) - \frac{3}{t-3}u(t) = \alpha'(t)(t-3)^3 = \frac{t+5}{t-3} \Leftrightarrow \alpha'(t) = \frac{t+5}{(t-3)^4}$$

Mais

$$\frac{t+5}{(t-3)^4} = \frac{t-3+8}{(t-3)^4} = \frac{1}{(t-3)^3} + \frac{8}{(t-3)^4}.$$

Ainsi

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(t-3)^2} - \frac{8}{3}\frac{1}{(t-3)^3} + \widetilde{C}.$$

On obtient finalement la solution

$$u(t) = \widetilde{C}\cdot(t-3)^3 - \frac{1}{6}(3t+7), \quad \widetilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

Cherchons une fonction $v \in C^1(]0,\infty[)$ qui ne s'annule pas, sauf pour $x = 1$ et qui vérifie

$$\int_1^x v(t)\,dt = \frac{(v(x))^2}{x}, \quad \forall x \in]0,\infty[.$$

En dérivant cette égalité de part et d'autre, on obtient :

$$v(x) = \frac{2v(x)\,v'(x)}{x} - \frac{v(x)^2}{x^2}$$

ou, en simplifiant par $v(x)$:

$$v'(x) - \frac{v(x)}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Considérons l'équation sans second membre :

$$w'(x) - \frac{w(x)}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{1}{2x}.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\ln(w(x)) = \frac{1}{2}\ln x + C \quad \Leftrightarrow \quad w(x) = \alpha\sqrt{x}, \quad \text{avec } \alpha = e^C.$$

Si on fait varier la constante α, i.e en posant $v(x) = \alpha(x)\sqrt{x}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} = v'(x) - \frac{v(x)}{2x} &= \left(\alpha'(x)\sqrt{x} + \frac{\alpha(x)}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{\alpha(x)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \alpha'(x)\sqrt{x} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha'(x) &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha(x) &= \frac{x^{3/2}}{3} + d,
\end{aligned}$$

où d est une constante. Ainsi

$$v(x) = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + d\right)\sqrt{x}.$$

Pour $x = 1$, il faut que $v(1) = 0$. On obtient $d = -\frac{1}{3}$ et finalement

$$v(x) = \frac{-\sqrt{x} + x^2}{3}, \qquad x \in]0, \infty[.$$

Exercice 3. En constatant que $y(x) = e^x$ en est une solution particulière, le changement de variable $z(x) = y(x) - e^x$ transforme l'équation de Ricatti proposée en l'équation de Bernoulli $z'(x) = z^2(x)$ dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(0) = -1$ est

$$z(x) = -\frac{1}{1+x}, \quad x > -1.$$

Par conséquent la solution cherchée est

$$y(x) = z(x) + e^x = -\frac{1}{1+x} + e^x, \quad x > -1.$$

Exercice 4.

(1) On peut réécrire l'équation comme

$$u'(t) = \frac{-u(t)}{t - u(t)} = \frac{-\frac{u(t)}{t}}{1 - \frac{u(t)}{t}}.$$

Si on pose $w(t) = \dfrac{u(t)}{t}$, on a $u'(t) = w(t) + tw'(t)$ et l'équation à variables séparées suivante

$$\begin{aligned}
w'(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{w^2(t) - 2w(t)}{1 - w(t)} \quad &\Leftrightarrow \quad f(w(t))w'(t) = \frac{1}{t} \\
&\Leftrightarrow \quad F(w(t)) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1.
\end{aligned}$$

$F(w)$ est donnée par

$$F(w) = \int \frac{1-w}{w^2-2w}dw = -\frac{1}{2}\int \frac{2w-2}{w^2-2w}dw = -\frac{1}{2}\ln|w^2-2w| + C_2.$$

Ainsi, en posant $C = 2(C_2 - C_1)$,

$$\ln|w^2(t) - 2w(t)| \;=\; -2\ln|t| + C \;=\; \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad |w^2(t) - 2w(t)| = \frac{e^C}{t^2}.$$

Nous pouvons enlever les valeurs absolues et remplacer e^C par une constante $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$ pour avoir

$$w^2(t) - 2w(t) = \frac{\widetilde{C}}{t^2}$$

La condition initiale $\frac{1}{2} = u(1) = w(1)$ nous donne immédiatement $\widetilde{C} = \dfrac{-3}{4}$. Pour expliciter $w(t)$, nous devons résoudre l'équation du second degré

$$w^2(t) - 2w(t) + \frac{3}{4t^2} = 0$$

qui n'admet de solutions que si $t^2 \geq \dfrac{3}{4}$:

$$w_{1,2}(t) = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4t^2}}.$$

La seule solution continue satisfaisant la condition initiale est

$$w(t) = 1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4t^2}}, \quad t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalement, la solution maximale (non-globale) $u(t)$ est donnée par :

$$u(t) = tw(t) = t - \frac{\sqrt{4t^2-3}}{2}, \quad \forall t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarque : On obtient la même solution beaucoup plus rapidement si on pose $v(t) = x - y(t)$. En effet, on obtient immédiatement de l'équation $x = v'(t)v(t)$ et donc $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}v^2(t) + C$.

(2) On calcule formellement,

$$u'(t) = t^2 \cdot (u(t))^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{u'(t)}{u(t)^3} = t^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{(u(t))^2} = \frac{t^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad u(t)^2 = \left(-2C - \frac{2}{3}t^3\right)^{-1}$$

où C est une constante. Comme $u(0) = 1$, on obtient $1 = -\frac{1}{2C}$, ce qui implique $C = -\frac{1}{2}$ et donc

$$u(t)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t^3} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}t^3}}.$$

Si $\bar{t} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, alors $1 - \frac{2}{3}\bar{t}^3 = 0$ et on a "explosion" de la solution $u(t)$ lorsque $t \to \bar{t}$. Ainsi, le problème de Cauchy n'a pas de solution globale, mais une solution maximale sur $[0, \bar{t}[$.

(3) Nous pouvons d'abord remarquer que la fonction f correspondant au problème s'écrit ici $f(t,x) = t^4 + 2t - t^2x$ et vérifie trivialement l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz avec $\ell(t) = t^2$, pour $t \geq 0$, ce qui garantit l'existence d'une solution globale unique.

Le problème homogène se résoud

$$u'(t) + t^2u(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'(t)}{u(t)} = -t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u(t)| = -\frac{t^3}{3} + K \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = Ce^{-\frac{t^3}{3}},\ t \geq 0,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Faisons maintenant varier la constante C. On cherche la solution u du problème de Cauchy sous la forme $u(t) = C(t)e^{-\frac{t^3}{3}}$, ce qui donne $u'(t) = e^{-\frac{t^3}{3}}(C'(t) - t^2C(t))$. Ceci conduit au problème suivant pour $C(t)$:

$$C'(t)e^{-\frac{t^3}{3}} = t^4 + 2t.$$

On est donc amené à trouver une primitive de $e^{\frac{t^3}{3}}(t^4 + 2t)$, qui est donnée (!) par $C(t) = e^{\frac{t^3}{3}}t^2 + cste$. Revenant à la forme choisie pour u et tenant compte de la condition initiale, on obtient

$$u(t) = e^{-\frac{t^3}{3}} + t^2, \qquad t \geq 0.$$

Exercice 5.

$$u'(t) = \sqrt{u(t) + \sin(t)} - \cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'(t) + \cos(t)}{\sqrt{u(t) + \sin(t)}} = 1.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on obtient

$$\sqrt{u(t) + \sin(t)} = \frac{t}{2} + C.$$

La condition $t \to 0^+$ implique $C = 0$ et

$$u(t) = \frac{t^2}{4} - \sin(t)$$

Exercice 6. On commence par noter que si $u_0 = 0$, alors le problème n'admet pas de solutions si $m < 0$ et admet la solution triviale $u \equiv 0$ si $m > 0$ (on peut montrer que c'est l'unique solution). Par la suite, nous admettrons que $u_0 \neq 0$.

Nous allons appliquer la technique de la variation de la constante. La solution générale de l'équation $u'(t) + p(t)u(t) = 0$ est donnée par

$$u_g(t) = Ce^{-P(t)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds.$$

En faisant varier la constante, nous cherchons une solution de la forme $u(t) = C(t)e^{-P(t)}$. En la replongeant dans l'équation de base nous obtenons la nouvelle équation

$$\begin{aligned} C'(t)e^{-P(t)} = f(t)\left(C(t)e^{-P(t)}\right)^m \; &\Leftrightarrow \; \frac{C'(t)}{(C(t))^m} = f(t)\left(e^{P(t)}\right)^{1-m} \\ &\Leftrightarrow \; \int_{t_0}^{t} \frac{C'(s)}{(C(s))^m}\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\left(e^{P(s)}\right)^{1-m} ds \end{aligned}$$

Puisque $m \neq 1$ et $C(t_0) = u(t_0) = u_0 \neq 0$, nous pouvons calculer le membre de gauche

$$\int_{t_0}^{t} \frac{C'(s)}{(C(s))^m}\, ds = \left.\frac{C(s)^{1-m}}{(1-m)}\right|_{t_0}^{t} = \frac{1}{1-m}\left(C(t)^{1-m} - u_0^{1-m}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} C(t) &= \left[u_0^{1-m} + (1-m)\int_{t_0}^{t} f(s)\left(e^{P(s)}\right)^{1-m} ds\right]^{\frac{1}{1-m}} \\ &= u_0\left[1 + (1-m)u_0^{m-1}\int_{t_0}^{t} f(s)\left(e^{P(s)}\right)^{1-m} ds\right]^{\frac{1}{1-m}} \\ \Rightarrow \quad u(t) &= u_0 e^{-P(t)}\left[1 + (1-m)u_0^{m-1}\int_{t_0}^{t} f(s)\left(e^{P(s)}\right)^{1-m} ds\right]^{\frac{1}{1-m}} \end{aligned}$$

Remarque : si $m > 1$, la partie entre crochets est élevée à une puissance négative, et donc ne doit pas s'annuler. La solution trouvée est donc maximale sur le plus grand intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et sur lequel

$$1 + (1-m)u_0^{m-1}\int_{t_0}^{t} f(s)\left(e^{P(s)}\right)^{1-m} ds > 0.$$