Corrigé 4

Exercice 1.

Si on pose $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, on peut récrire le système sous la forme suivante : $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
La solution générale du problème sans second membre est donné par

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{At} \cdot \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (t+3)(t-3)$. Comme il existe deux valeurs propres différente, A est diagonalisable. On trouve $f_1 = (1, -1)$, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre -3, et $f_2 = (5, 1)$ qui est un vecteur propre associé à 3. La matrice de changement de base P et le matrice des valeurs propres D sont donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{x}_h(t) = Pe^{Dt} \underbrace{P^{-1}\mathbf{c}}_{\equiv\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-3t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + 5c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Maintenant les conditions initiales $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnent le système d'équations $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 5c_2 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix}$ et cela implique que $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$. La solution voulue est donc

$$\begin{cases} x_1(t) &= e^{-3t} + 10e^{3t} \\ x_2(t) &= -e^{-3t} + 2e^{3t}. \end{cases}$$

Exercice 2.

Le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Pour la valeur propre 1, l'espace propre associé est engendré par $f_1 = (1,0,0)$ et $f_2 = (0,1,2)$.
Celui associé à la valeur propre 2 est engendré par $f_3 = (-1,2,6)$. Donc la matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et la formule de changement de base donne

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(PBP^{-1}) = P\exp(B)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & -2e+e^2 & \frac{e}{2} - \frac{e^2}{2} \\ 0 & 3e - 2e^2 & -e + e^2 \\ 0 & 6e - 6e^2 & -2e + 3e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Si on pose $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, on peut récrire le système sous la forme suivante : $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (t-2)(t+1)$. Comme il existe deux valeurs propres différentes, A est diagonalisable. On trouve $f_1 = (1,-1)$, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et $f_2 = (4,-3)$ qui est un vecteur propre associé à -1.

La matrice de changement de base P et le matrice des valeurs propres D sont donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{x}_h(t) = Pe^{Dt} \underbrace{P^{-1}\mathbf{c}}_{\equiv\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-t} \\ -c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Maintenant les conditions initiales $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donnent le système d'équations $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 4c_2 \\ -c_1 - 3c_2 \end{pmatrix}$ et cela implique que $c_1 = -1$ et $c_2 = 1$. La solution voulue est donc

$$\begin{cases} x_1(t) &= -e^{2t} + 4e^{-t} \\ x_2(t) &= e^{2t} - 3e^{-t}. \end{cases}$$

Exercice 4. On considère l'équation :

$$x^{(4)}(t) - 2x^{(3)}(t) + 2x^{(2)}(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme charactéristique de A est

$$p_A(t) = t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 = (t^2+1)(t-1)^2 = (t-1)^2(t-i)(t+i).$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = 1, i$ et $-i$.

On vérifie que $\lambda = 1$ est de multiplicité 2, mais la dimension du sous-espace propre associé est 1. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

(3) Montrer qu'il existe P inversible telle que $PAP^{-1} = B$, avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ i & -i & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Les solutions de $X' = AX$ sont

$$X(t) = \exp(tA)X_0 = P^{-1}\exp(tB)PX_0.$$

Or

$$B^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Posons $\vec{u} = (u, v, w)^T$. L'équation :

$$\vec{x}'(t) = \vec{u} \times \vec{x}(t).$$

peut également être écrite

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= vx_3(t) - wx_2(t) \\ x_2'(t) &= -ux_3(t) + wx_1(t) \\ x_3'(t) &= ux_2(t) - vx_1(t) \end{aligned}$$

En utilisant une rotation telle que $R\vec{u} = (1, 0, 0)^T$, on pose $\vec{y} = R\vec{x}$ qui satisfait :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= -y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_2(t) \end{aligned}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C \\ y_2'(t) &= -y_3(t) \\ y_3''(t) + y_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C \\ y_2(t) &= \mu\cos(t) - \lambda\sin(t) \\ y_3(t) &= \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \end{aligned}$$

Exercice 6. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + \sin(3x(t) - y(t)) \\ y'(t) &= e^{x(t)} - 1 \end{aligned}$$

(1) Justifier l'existence d'une unique solution maximale. On notera I l'intervalle de définition de cette solution. L'application

$$(x, y) \to (x + \sin(3x - y)\,,\, e^x - 1)$$

est localement Lipschitzienne (car de classe C^1). Par le théorème de Cauchy-Lipchitz, il existe une unique solution maximale étant donné une condition initiale.

(2) Déterminer les points d'équilibre de l'équation différentielle. On résoudt

$$\begin{aligned} 0 &= x(t) + \sin(3x(t) - y(t)) \\ 0 &= e^{x(t)} - 1 \end{aligned}$$

La deuxième équation nous donne $x(t) = 0$. La première équation donne $0 = \sin(-y(t))$ et donc $y(t) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(3) Etudier la stabilité de ces points d'équilibre. La jacobienne du système s'écrit :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 3\cos(3x - y) & -\cos(3x - y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

La valeur de la matrice jacobienne pour $(x, y) = (0, k\pi)$ est donc :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1+3(-1)^k & (-1)^{k+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k pair, la trace de J est égale à 4 et son déterminant à 1. Les deux valeurs propres sont donc positives, et le point d'équilibre est stable.

Pour k impair, la trace de J est égale à 2 et son déterminant à -1. Une valeur propre est positive et l'autre est négative ; le point d'équilibre est un point-selle.

Exercice 7.

Le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (t-1)^2$, d'où l'unique valeur propre 1. A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable, c'est à dire $A = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre pour 1 est donné par $f_1 = (1, -1)$. Pour compléter la matrice de changement de base, il faut un vecteur f_2 tel que $Af_2 = f_1$. En choisissant $f_2 = (1, 0)$, la matrice de changement de base est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Ainsi $\exp(tA) = P\exp(tT)P^{-1}$. On écrit $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
La matrice D est diagonale, N est nilpotente avec $N^2 = 0$ et $DN = ND$. Alors on a

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \qquad \exp(N) = I_2 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque $N^i = 0$ pour tout $i \geq 2$. Comme $DN = ND$,

$$\exp(T) = \exp(D)\exp(N) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

et de la même manière :

$$\exp(tT) = \exp(tD)\exp(tN) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(tA) \;=\; \begin{pmatrix} (1+t)e^t & te^t \\ -te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$