ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

CORRECTIONS EXAMEN COURS EULER

Cours: Analyse II (Module B)
Enseignant: Alexandre Caboussat
Date: 16 mai 2018
Durée: 120 minutes

Nombre de pages (page de garde incluse): 7

Nom:

Prénom:

Note:

Instructions et matériel autorisé:

Aucun matériel n'est autorisé.
Pour tous les exercices, prendre soin à la rédaction.
Il est autorisé d'écrire au stylo ou au crayon à papier.
Enoncer clairement les hypothèses et justifier tous vos calculs.

Merci de laisser ce document agrafé. Si vous séparez les pages, vous serez responsable de toute page manquante. Prière de s'assurer que toutes les pages sont présentes lorsque vous rendez votre copie.

Exercice 1 (20 points)

Trouver une fonction $v \in C^1(]0,\infty[)$ qui ne s'annule pas sauf pour $x = 1$ et qui vérifie:

$$\int_1^x v(t)\,dt = \frac{(v(x))^2}{x}, \quad \forall x \in]0,\infty[.$$

En dérivant cette égalité de part et d'autre, on obtient :

$$v(x) = \frac{2v(x)\,v'(x)}{x} - \frac{v(x)^2}{x^2}$$

ou, en simplifiant par $v(x)$:

$$v'(x) - \frac{v(x)}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Considérons l'équation sans second membre :

$$w'(x) - \frac{w(x)}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{1}{2x}.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\ln w(x) = \frac{1}{2}\ln x + C \quad \Leftrightarrow \quad w(x) = \alpha\sqrt{x}, \quad \text{avec } \alpha = e^C.$$

Si on fait varier la constante α, i.e en posant $v(x) = \alpha(x)\sqrt{x}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} = v'(x) - \frac{v(x)}{2x} &= \left(\alpha'(x)\sqrt{x} + \frac{\alpha(x)}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{\alpha(x)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \alpha'(x)\sqrt{x} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha'(x) &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha(x) &= \frac{x^{3/2}}{3} + d,
\end{aligned}$$

où d est une constante. Ainsi

$$v(x) = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + d\right)\sqrt{x}.$$

Pour $x = 1$, il faut que $v(1) = 0$. On obtient $d = -\frac{1}{3}$ et finalement

$$v(x) = \frac{-\sqrt{x} + x^2}{3}, \qquad x \in]0,\infty[.$$

Exercice 2 (20 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ non nul, et soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \quad x > 0,$$

admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

La solution de cette équation différentielle est:

$$y(x) = \lambda e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$y(x+T) = \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^{x+T} e^{at} f(t)dt.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^{x+T} e^{at} f(t)dt &= \int_0^x e^{at} f(t)dt + \int_x^{x+T} e^{at} f(t)dt \\
&= \int_0^x e^{at} f(t)dt + \int_0^T e^{a(u+T)} f(u+T)du \\
&= \int_0^x e^{at} f(t)dt + e^{aT} \int_0^T e^{au} f(u)du
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
y(x+T) &= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^{x+T} e^{at} f(t)dt \\
&= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^x e^{at} f(t)dt + e^{-ax} \int_0^T e^{au} f(u)du \\
&= \lambda e^{-a(x+T)} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)dt + y(x) - \lambda e^{-ax} \\
&= y(x) + \lambda e^{-a(x+T)} - \lambda e^{-ax} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)dt
\end{aligned}$$

Donc la solution est pérodique de période T si et seulement si:

$$\begin{aligned}
\lambda e^{-a(x+T)} - \lambda e^{-ax} + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)dt &= 0 \\
\lambda &= \frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)dt
\end{aligned}$$

Il est à noter que, comme $a \neq 0$ et $T \neq 0$, ce nombre est bien défini et unique.

Exercice 3 (20 points)

Soit γ et β deux nombres réels positifs donnés. On considère l'équation différentielle du deuxième ordre suivante:

$$\begin{cases} u''(t) + \gamma u'(t) + \beta u(t) = 0, & \forall t \in [0, \infty[, \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = 0, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$ est un nombre donné.

Démontrer que $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + \gamma r + \beta = 0$ et donc $r = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$.

Trois cas possibles:

1°) $\gamma^2 - 4\beta > 0$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

avec $r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$, $r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$. Puisque r_1 et r_2 sont négatifs, on a $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

2°) $\gamma^2 - 4\beta < 0$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \Big(c_1 \sin \big(\frac{\sqrt{4\beta - \gamma^2}}{2} \big) + c_1 \cos \big(\frac{\sqrt{4\beta - \gamma^2}}{2} \big) \Big)$$

et donc $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

3°) $\gamma^2 - 4\beta = 0$. Solution générale:

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2} t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2} t} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 4 (20 points)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = (2-t)x_1(t) + (t-1)x_2(t) \\ x_2'(t) = 2(1-t)x_1(t) + (2t-1)x_2(t) \end{cases}$$

Posons

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre le système $X'(t) = A(t)X(t)$. On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants, en diagonalisant pour chaque t la matrice $A(t)$. Son polynôme caractéristique est

$$p_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t,$$

dont les racines sont t et 1. Le miracle est que les vecteurs propres ne dépendent pas de t, et sont donnés par:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On pose donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

et ainsi on a

$$A(t) = PD(t)P^{-1}.$$

On peut donc résoudre le système exactement comme s'il était à coefficients constants. Plus prcisment, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors Y est solution de $Y'(t) = D(t)Y(t)$, soit

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = ty_2(t) \end{cases}$$

Il vient

$$y_1(t) = Ce^t \quad \text{et} \quad y_2(t) = De^{t^2/2},$$

avec $C, D \in \mathbb{R}$. On revient à X par la relation $Y = PX$, et on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) = Ce^t + De^{t^2/2} \\ x_2(t) = Ce^t + 2De^{t^2/2}, \end{cases}$$

avec $C, D \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (20 points)

Résoudre

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)}, & x > 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

L'équation peut se récrire:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{y^2(x)}{x^2}}$$

On pose

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}, \qquad z'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}$$

et on obtient:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\sqrt{1 + z^2(x)}$$

On peut résoudre cette équation par la séparation de variables

$$\begin{aligned} \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}}dx &= \int \frac{1}{x}dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du &= \ln(x) + C \end{aligned}$$

L'intégration du membre de gauche s'effectue de la manière suivante (avec le changement de variable $u = \tan(w)$):

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan(w)^2}}\frac{1}{\cos(w)^2}dw = \int \sqrt{1+\tan(w)^2}dw = \int \frac{1}{\cos(w)}dw \\ &= \ln\left(\frac{1}{\cos(w)} + \tan(w)\right) = \ln\left(\sqrt{1+z(x)^2} + z(x)\right) \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{1+z(x)^2} + z(x)\right) &= \ln(x) + C \\ \sqrt{1+z(x)^2} + z(x) &= Cx \\ y(x) + \sqrt{x^2 + y(x)^2} &= Cx^2 \\ y(x) + \sqrt{x^2 + y(x)^2} &= x^2 \qquad \text{car } y(1) = 0 \end{aligned}$$

Comme

$$y(x) + \sqrt{x^2 + y(x)^2} = x^2 = xy'(x)$$

on a

$$y'(x) = x, \qquad y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$