Corrigé 3

Devoir 1-3.

(1) $u(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \dfrac{e^{-t} - 8e^t}{3}\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$

(2) $u(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} - te^{-3t} + \dfrac{5\sin(2t) + \cos(2t)}{52}$

(3) $u(t) = \dfrac{c_1e^{-t} + c_2e^t}{t^2}$.

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résolvons

$$x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$$

sachant que l'équation homogène associée possède deux solutions qui sont de la forme $y(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On obtient

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + x^2(3+x)\ln x + \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

En effet, les deux solutions du système homogène sont :

$$y_1(x) = x^2, \qquad y_2(x) = x^3$$

ce qui donne un wronskien $w[y_1, y_2](x) = x^4$.
Recherchons une solution de la forme

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$$

de l'équation "normalisée" :

$$y''(x) - 4 \cdot \frac{y'(x)}{x} + 6 \cdot \frac{y(x)}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}.$$

On obtient (c.f. polycopié, p. 18) :

$$\gamma_1'(x) = -\frac{(x-1)^3}{x^6}x^3, \qquad \gamma_2'(x) = \frac{(x-1)^3}{x^6}x^2$$

on bien encore

$$\gamma_1'(x) = -\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right), \qquad \gamma_2'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

On a alors les primitives (pour $x > 0$) :

$$\gamma_1(x) = -\left(x - 3\ln(x) - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) + c_1,$$

et

$$\gamma_2(x) = \ln(x) + \frac{3}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + c_2.$$

Finalement, $x^2\gamma_1(x) + x^3\gamma_2(x)$ donne

$$-x^3 + 3x^2\ln(x) + 3x - \frac{1}{2} + c_1x^2 + x^3\ln(x) + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3} + c_2x^3$$

d'où la solution.

Exercice 2.

1.) Commençons par appliquer le critère de d'Alembert sur les séries numériques. Si on calcule, à x fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{|x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0.$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série est $R = \infty$. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ définit donc une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\,x^{3n-1}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(3n-1)x^{3n-2}}{(3n)!}.$$

Les séries dérivées héritent du rayon de convergence ($R = \infty$). On obtient ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Il s'ensuit donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, chacune des trois séries entières converge absolument et on a :

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2.) On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Ainsi $f(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(P) \qquad \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = e^t$$

avec les conditions initiales $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$ (c'est-à-dire $u(t) = f(t)$).
Calculons la solution générale de l'équation sans second membre

$$\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = 0$$

d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Puisque le discriminant de cette équation vaut $1 - 4 = -3$, on obtient :

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

On vérifie immédiatement que $\frac{1}{3}\, e^t$ est une solution particulière de (P), ce qui implique qu'une solution générale de (P) est donnée par

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

En posant $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$, on obtient $c_1 = \frac{2}{3}$ et $c_2 = 0$. Ainsi, la solution de (P) qui vérifie ces conditions initiales est

$$u(t) = \frac{2}{3}\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

Puisque $u(1) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{2}{3}\, e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\, e}$$

Exercice 3.

Si $u(t)$ est le déplacement vertical du corps (dans la direction de la force de gravité) alors sa vitesse est donnée par $u'(t)$ et son accélération par $u''(t)$. Ainsi, la loi de Newton conduit à l'équation

$$mu''(t) = mg - \sigma\big(u'(t)\big)^2,$$

où g est l'accélération terrestre et $\sigma > 0$ est le facteur de proportionnalité correspondant à la résistance de l'air sur l'objet en chute.

Au temps $t=0$, la déplacement vertical initial est nul et on suppose que l'objet a une vitesse nulle. On est donc conduit au problème de trouver une fonction $u : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$(1) \qquad \begin{cases} u''(t) + \dfrac{\sigma}{m}\, u'(t)^2 = g, & \text{si } t \in [0,\infty[\\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

Si $v(t) = u'(t)$ alors v vérifie :

$$(2) \qquad \begin{cases} v'(t) + \dfrac{\sigma}{m}\, v(t)^2 = g & \text{si } t \in [0,\infty[\\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées puisque f s'écrit comme $f(t,x) = k(x)h(t)$ avec $k(x) = g - \frac{\sigma}{m}x^2$ et $h(t) = 1$. On a :

$$\frac{v'(t)}{g - \frac{\sigma}{m}v^2(t)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{v(t)} \frac{ds}{g - \frac{\sigma}{m}s^2} = \int_0^t ds = t \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{v(t)} \frac{ds}{(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{\sigma}{m}}s)(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{\sigma}{m}}s)} = t$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \int_0^{v(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{\sigma}{m}}s} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{\sigma}{m}}s} \right) ds = t$$

ou encore

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{\sigma}{m}}v(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{\sigma}{m}}v(t)} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}} \ln \frac{\sqrt{\frac{mg}{\sigma}} + v(t)}{\sqrt{\frac{mg}{\sigma}} - v(t)} = t.$$

Avec la condition initiale $v(0) = 0$, les termes en logarithmes sont bien définis tant que $v(t) < \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}$. Ainsi

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{\sigma}} + v(t)}{\sqrt{\frac{mg}{\sigma}} - v(t)} = e^{2\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v(t)(1 + e^{2\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t}) = -\sqrt{\frac{mg}{\sigma}}(1 - e^{2\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}\; \frac{e^{\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t}}{e^{\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g\sigma}{m}}t}}$$

et donc $u'(t) = v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{\sigma}}\ \mathrm{th}\ \sqrt{\dfrac{\sigma g}{m}}t$. Les primitives de cette équation sont données par

$$u(t) = \sqrt{\frac{mg}{\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{m}{\sigma g}} \ln \left[\ \mathrm{ch} \left(\sqrt{\frac{\sigma g}{m}}t \right) \right] + C.$$

Pour vérifier la condition initiale $u(0) = 0$, il faut que $C = 0$. Ainsi la solution de (1) est donnée par

$$u(t) = \frac{m}{\sigma}\ln\left[\text{ ch}\left(\sqrt{\frac{\sigma g}{m}}t\right)\right].$$

Finalement, puisque $\lim_{t\to\infty}$ th $t = 1$, on a $\lim_{t\to\infty} u'(t) = \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}$.

Remarque : On se convainc facilement que la solution $v(t)$ vérifie $0 < v(t) < \sqrt{\frac{mg}{\sigma}}$, $\forall t > 0$.

Exercice 4.

Soit une fonction continue $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. Montrons que toute solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

possède une suite de zéros qui tend vers $+\infty$ si la fonction q vérifie $\int_1^\infty q(x)dx = +\infty$.

Démonstration : Supposons par l'absurde qu'il existe $a > 0$ tq, par exemple, $y(x) > 0$, $\forall x \geq a$. Alors, on a

$$y''(x) = -q(x)y(x) < 0, \ \forall x > a$$

et donc la fonction y' est strictement décroissante sur $]a, \infty[$.

Soit alors $b > a$. On a par le théorème des accroissements finis, si $x > b$:

$$y(x) \quad = \quad y(b) + y'(b_x)(x-b) \quad < \quad y(b) + y'(b)(x-b)$$

où $b_x \in]b, x[$. Il suffit maintenant de trouver un point $b > a$ tel que $y'(b) < 0$ pour obtenir une contradiction de l'affirmation $y(x) > 0$, $\forall x \geq a$.

Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $z(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)}$ définie sur $[a, \infty[$. On a immédiatement

$$y'(x) < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z(x) > 0.$$

Remarquant que $z'(x) = q(x) + z^2(x)$, $x \in]a, \infty[$ on a

$$z(x) = z(a) + \int_a^x z'(t)dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

et donc, il existe un $c > b$ tel que $y(c) < 0$, ce qui est une contradiction.

Exercice 5.

Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Cherchons la solution générale de l'équation différentielle du 2^e ordre suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos \omega t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

L'équation homogène est donnée par

$$y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique s'écrit donc :

$$r^2 + 2r + \alpha = 0.$$

Ainsi, on a trois cas à considérer : (1.) $1 - \alpha > 0$; (2.) $1 - \alpha < 0$; (3.) $1 - \alpha = 0$.

1$^{\text{er}}$ cas : $\alpha < 1$. Ainsi $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ et deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont

$$y_1(t) = e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t}, \qquad y_2(t) = e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}.$$

Si on cherche une solution particulière de l'équation de la forme

$$y(t) = \gamma_1 \cos \omega t + \gamma_2 \sin \omega t,$$

on a donc

$$\begin{aligned} -\omega^2\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2\omega^2 \sin \omega t - 2\gamma_1\omega \sin \omega t + 2\gamma_2\omega \cos \omega t + \alpha\gamma_1 \cos \omega t + \alpha\gamma_2 \sin \omega t &= \cos \omega t \\ \Leftrightarrow \quad \cos \omega t\Big(-\omega^2\gamma_1 + 2\gamma_2\omega + \alpha\gamma_1\Big) + \sin \omega t\Big(-\omega^2\gamma_2 - 2\gamma_1\omega + \alpha\gamma_2\Big) &= \cos \omega t. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{aligned} -\gamma_2\omega^2 - 2\gamma_1\omega + \alpha\gamma_2 &= 0, \\ -\omega^2\gamma_1 + 2\gamma_2\omega + \alpha\gamma_1 &= 1. \end{aligned} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} 2\omega\gamma_1 + (\omega^2 - \alpha)\gamma_2 &= 0, \\ (\alpha - \omega^2)\gamma_1 + 2\omega\gamma_2 &= 1. \end{aligned} \right.$$

De la première équation, on tire si $\omega \neq 0$, $\gamma_1 = \frac{-\omega^2+\alpha}{2\omega}\gamma_2$. En substituant cette expression dans la seconde équation, on obtient

$$\left(2\omega + \frac{(\alpha-\omega^2)^2}{2\omega}\right)\gamma_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2\right)\gamma_2 = 2\omega$$

Ainsi, si $\omega \neq 0$, on a finalement

$$\gamma_2 = \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \frac{\alpha-\omega^2}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}.$$

La solution générale de l'équation avec second membre dans ce cas est

$$y(t) = c_1\ e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2\ e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t} + \frac{\alpha-\omega^2}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\ \cos\omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\ \sin\omega t$$

Si $\omega = 0$ on obtient $-\alpha\gamma_2 = 0$ et $\alpha\gamma_1 = 1$. En supposant encore $\alpha \neq 0$, on obtient $\gamma_2 = 0$ et $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha}$. Dans ce cas, on a

$$\boxed{y(t) = c_1\ e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2\ e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t} + \frac{1}{\alpha}}$$

Si $\omega = \alpha = 0$, l'équation différentielle devient

$$y''(t) + 2y'(t) = 1$$

et on vérifie que la solution générale est

$$\boxed{y(t) = c_1\ e^{-2t} + c_2 + \frac{t}{2}}$$

2ème cas : $\alpha > 1$. Si $\omega \neq 0$, on vérifie comme fait précédemment que l'on a

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\cdot t) + c_2 e^{-t}\sin(\sqrt{\alpha-1}\cdot t) + \frac{\alpha-\omega^2}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\cos\omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\sin\omega t.$$

Si $\omega = 0$, la solution est la même puisque α est nécessairement non nul.

3ème cas : $\alpha = 1$. On obtient

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{\alpha-\omega^2}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\cos\omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha-\omega^2)^2}\sin\omega t.$$

Résumé :

— Si $\alpha = \omega = 0$, on obtient pour solution générale

$$y(t) = c_1\ e^{-2t} + c_2 + \frac{t}{2}, \qquad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

— Si $\alpha^2 + \omega^2 \neq 0$, on obtient pour solution générale

— Si $\alpha < 1$:

$$y(t) = c_1\ e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t} + \frac{\alpha - \omega^2}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \sin \omega t.$$

— Si $\alpha = 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{\alpha - \omega^2}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \sin \omega t.$$

— Si $\alpha > 1$:

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos \sqrt{\alpha - 1} t + c_2 e^{-t} \sin \sqrt{\alpha - 1} t + \frac{\alpha - \omega^2}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4\omega^2 + (\alpha - \omega^2)^2} \sin \omega t.$$

Exercice 6. Pour commencer, cherchons la solution de l'équation homogène

$$(1 + x^2) v''(x) + 4x v'(x) + 2v(x) \ = \ 0.$$

Nous supposons qu'elle a la forme

$$\begin{cases} v(x) \ = \ c(x) y_1(x) = \dfrac{c(x)}{1 + x^2} \\ v'(x) \ = \ \dfrac{c'(x)}{1 + x^2} - \dfrac{2x c(x)}{(1 + x^2)^2} \\ v''(x) \ = \ \dfrac{c''(x)}{1 + x^2} - \dfrac{2c(x) + 4x c'(x)}{(1 + x^2)^2} + \dfrac{8x^2 c(x)}{(1 + x^2)^3} \end{cases}$$

En la replongeant dans l'équation homogène, il reste

$$c''(x) \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c_1 + c_2 x \quad \Rightarrow \quad v(x) \ = \ c_1 \cdot \frac{1}{1 + x^2} + c_2 \cdot \frac{x}{1 + x^2}.$$

Nous cherchons maintenant la solution générale de l'équation normalisée

$$v''(x) + \frac{4x}{1 + x^2} v'(x) + \frac{2}{1 + x^2} v(x) \ = \ \frac{x^2 + x + 1}{1 + x^2} \ =: \ c(x).$$

qui est de la forme

$$v(x) \ = \ \gamma_1(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + x^2}}_{y_1(x)} + \gamma_2(x) \cdot \underbrace{\frac{x}{1 + x^2}}_{y_2(x)}.$$

Le wronskien étant donné par

$$W[y_1, y_2] \;=\; \frac{1}{(1+x^2)^2},$$

les formules de la page 18 du polycopié, nous donnent

$$\gamma_1(x) \;=\; -\int_0^x \frac{\left(\frac{t^2+t+1}{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{t}{1+t^2}\right)}{\frac{1}{(1+t^2)^2}}\,dt + c_1 \;=\; -\int_0^x (t^3+t^2+t)\,dt + c_1 \;=\; -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\gamma_2(x) \;=\; \int_0^x \frac{\left(\frac{t^2+t+1}{1+t^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}{\frac{1}{(1+t^2)^2}}\,dt + c_2 \;=\; \int_0^x (t^2+t+1)\,dt + c_2 \;=\; \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_2.$$

D'où la solution générale

$$v(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2}\left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}\right).$$

Exercice 7.

Notons que l'équation $f''(x) + f(-x) = x$ est équivalente Ã $f''(-x) + f(x) = -x$.

En posant $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$, on obtient

$$g''(x) \;=\; f''(x) + f''(-x) \;=\; (x - f(-x)) + (-x - f(x)) \;=\; -g(x)$$

et

$$h''(x) = f''(x) - f''(-x) = = \;(x - f(-x)) - (-x - f(x)) \;=\; 2x + h(x)$$

La solution de ces équation est

$$g(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x), \qquad h(x) = B_1 e^x + B_2 e^{-x} - 2x$$

Nous cherchons donc une solution de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + h(x)\right) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + B_1 e^x + B_2 e^{-x} - x.$$

En l'injectant dans l'équation initiale, nous obtenons

$$f''(x) + f(-x) - x \;=\; -2C_2\sin(x) + (B_1 + B_2)(e^x + e^{-x}) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \text{ et } B_1 = -B_2,$$

d'où la réponse finale

$$f(x) = C_1\cos(x) + B_1(e^x - e^{-x}) - x \;=\; C_1\cos(x) + B_1\sinh(x) - x.$$

Remarque : alternativement, nous pouvons trouver les mÃªmes conditions sur B_i, C_i en remarquant que $g(x)$ est paire et $h(x)$ impaire.