Géométrie II

Corrigé 11

Printemps 2019

Exercice 2
1. Soient $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ tels que $\phi(v) = \lambda v$. Alors, comme $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$, on a

$$\phi(\overline{v}) = \overline{\phi(v)} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v},$$

ce qui montre que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de $\overline{v}$.

2. Montrons premièrement que x, y sont linéairement indépendants : soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 = ax + by = (a - ib)v + (a + ib)\overline{v}.$$

Notons que $v, \overline{v}$ sont $\mathbb{C}-$linéairement indépendants car ce sont des vecteurs propres de valeurs propres différentes (comme $\lambda \notin \mathbb{R}$, alors $\lambda \neq \overline{\lambda}$). On en conclut que $a + ib = a - ib = 0$, donc $a = b = 0$.

Pour montrer que le sous-espace est stable, il suffit de montrer que $\phi(x), \phi(y)$ sont des combinaisons linéaires de x et y. On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{a}{2}(v + \overline{v}) + \frac{b}{2i}(v - \overline{v}) = \phi(x) = \frac{1}{2}(\lambda v + \overline{\lambda v}).$$

Réordonnant les termes, on trouve $a = \Re(\lambda) \in \mathbb{R}, b = -\Im(\lambda) \in \mathbb{R}$. On procède de même avec $\phi(y) = \Im(\lambda)x + \Re(\lambda)y$.

3. On utilise le théorème 3.9 du cours, avec W le sous-espace engendré par x et y. En complétant $\left\{ \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\}$ par des vecteurs de $W^\perp$ (notons que x et y sont orthogonaux, d'où $\left\{ \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\}$ est une BON de W), on obtient une base B telle

$$M_B = \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_{n-2} \end{pmatrix},$$

avec
$$M_2 = \begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix},$$
d'où $\det(M_2) = |\lambda|^2 = 1$, donc M_2 est une matrice de rotation et $\det(M_{n-2}) = \det(M)$.

4. On procède par récurrence en utilisant la partie 3. Si r est le nombre de vecteurs propres de valeur propre 1, et r' est le nombre de vecteurs propres de valeur propre -1, alors, dans une base appropriée, on écrit M sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} Id_r & 0 & 0 \\ 0 & -Id_{r'} & 0 \\ 0 & 0 & M' \end{pmatrix}.$$
On applique ensuite la partie 3 à M' pour obtenir le résultat.

Exercice 3
1. Fait au semestre d'automne. On pourra consulter l'exercice 8 de la série 6/7.

2. On utilise les notations de la partie 4 de l'exercice 2. Chaque matrice de la forme $M_{2,j}, j = 1, ..., r''$ est une matrice de rotation de $\mathbb{R}^2$, donc peut se décomposer, par 1., en produit de 2 symétries linéaires. Ceci signifie que $M_{\mathcal{B},\phi}$ peut effectivement être décomposée en produit d'au plus n symétries hyperplanes, étant donné que r'' vaut au plus $\frac{n}{2}$.

Exercice 4
1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On considère s la symétrie par rapport à l'hyperplan $v^\perp$, composée avec s', la symétrie par rapport à l'hyperplan $(0 + \frac{v}{2}) + v^\perp$. Notons que $(s' \circ s)(0) = v$. Aussi, adaptant l'exercice 8 de la série 6/7 du premier semestre, on sait que $s' \circ s$ est une translation. On a donc décomposé la translation $t_v : P \mapsto P + v$. en une composition de deux symétries hyperplanes.

2. On a montré à l'exercice 3 que toute isométrie linéaire est engendrée par les symétries hyperplanes. On vient de faire de même pour les translations. On conclut alors, comme toute isométrie $\phi = t_{\phi(0)} \circ \phi_0$ se décompose en une isométrie linéaire et une translation, que les symétries hyperplanes engendrent le groupe des isométries affines.

Exercice 6
1. Il faut montrer que, pour tout $i, j = 1, ..., 4$, on a que $\langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$. On a, par exemple,
$$\langle e'_1, e'_4 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 - e_2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle) = 0.$$

On procède de même pour les autres cas., ce qui montre le résultat.

2.

(i) Si $\sigma = (12)$, on a $\phi_\sigma(e'_1) = -e'_1, \phi_\sigma(e'_2) = e'_2, \phi_\sigma(e'_3) = e'_3$, donc ϕ_σ est une symétrie planaire dont le plan est formé par les vecteurs e'_2 et e'_3.

(ii) Si $\sigma = (123)$, on a que la matrice M_ϕ dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) est donnée par

$$M_\phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite $\det(M) = 1$, donc ϕ_σ est une rotation. L'axe est donné par le vecteur propre de M qui est $(0, 1, \sqrt{2})$. Pour trouver l'angle, on utilise le résultat de la série 10 pour obtenir que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2}$.

(iii) Si $\sigma = (1234)$, on procède de manière similaire à ce qui a été fait ci-dessus.

(iv) Si $\sigma = (12)(34)$, alors $\phi_\sigma(e'_1) = -e'_1, \phi_\sigma(e'_2) = e'_2, \phi_\sigma(e'_3) = -e'_3$, donc ϕ_σ est une symétrie axiale d'axe e'_2.