Serie 13 : Corrige

Exercice 1

1. On commence par rappeler les rotations du cube. Il y en a 24:

   - L'identite
   - 2 x 3 rotations d'ordre 4 passant par deux faces opposees
   - 1 x 3 rotations d'ordre 2 passant par deux faces opposees
   - 2 x 4 rotations d'ordre 3 passant par deux sommets opposes
   - 1 x 6 rotations d'ordre 2 passant par deux aretes opposees

   Explications: On ecrit a chaque fois: a x b rotations d'ordre c passant par deux D oppose(e)s.

   - a = nombre de rotations d'ordre c passant par une paire de D donnee. Pour les rotations d'ordre 4 des faces, on a la rotation d'ordre $\pi/4$ et celle d'ordre $3\pi/4$
   - b = nombre de paires de D (= nombre de D / 2).
   - Quand c est premier, a = c-1
   - Petit tips: hesitez pas a utiliser la dualite entre les solides platoniciens: ici le cube et l'octaedre sont en dualite, donc a chaque rotation du cube correspond une rotation de l'octaedre et inversement, et surtout, sommets et faces sont inverses. Ca peut etre utile notamment pour les rotations selon les sommets: une rotation entre deux sommets du cube, c'est comme une rotation entre deux faces de l'octaedre, qui sont des triangles, donc c'est d'ordre 3 :).

   Maintenant, on va colorier notre cube. Pour ca, on va appliquer la formule de Burnside: $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$ L'idee est la suivante: si je prends un cube et que je colorie les faces d'une certaine facon, ce coloriage reste invariant quelle que soit la rotation que j'applique a mon cube. Donc si j'ai deux coloriages et que je peux obtenir l'un a partir de l'autre en faisant une rotation, alors c'est les memes. Donc on fait agir notre groupe G de rotations sur X l'ensemble des coloriages du cube:

   - $|G| = 24$
   - Pour calculer les points fixes de chaque $g \in G$, on regarde en fait combien de choix de couleur on a pour chaque face. Faisons l'exemple des rotations d'ordre 2 entre deux faces et les autres sont pareils:

     Si on prend une telle rotation et qu'on veut calculer ses points fixes dans les coloriages, il faut regarder de quelle facon on peut colorier les faces tel que le coloriage reste fixe par la rotation. Concentrons nous sur la face superieure (celle par laquelle passe l'axe de la rotation). Cette face ne bouge pas en appliquant la rotation donc on peut la colorier de n'importe quelle couleur : 3 choix. Pareil pour la face opposee(aussi dans l'axe de rotation): 3 choix. Il reste les 4 faces laterales. Comme la rotation est d'ordre 2, si je l'applique une fois a un cube, j'inverse les faces opposees, si je l'applique 2 fois, je reviens a la configuration initiale(ordre 2). Donc si on veut un point fixe, il faut que deux faces opposees aient la meme couleur: on a donc 3 choix pour la premiere paire et 3 pour la deuxieme. Au final, pour une rotation d'ordre 2 passant par deux faces opposees, on a $3 * 3 * 3 * 3 = 3^4$ points fixes. Le meme raisonnement conduit a ces resultats:

- L'identite $= 1 * 3^6$
- 2 x 3 rotations d'ordre 4 passant par deux faces opposees $= 2 * 3 * 3^3$
- 1 x 3 rotations d'ordre 2 passant par deux faces opposees $= 1 * 3 * 3^4$
- 2 x 4 rotations d'ordre 3 passant par deux sommets opposes $= 2 * 4 * 3^2$
- 1 x 6 rotations d'ordre 2 passant par deux aretes opposees $= 1 * 6 * 3^3$

On met tous ces resultats dans la formule et on trouve bien 57.

2. On utilise n couleurs. Qu'est ce qui change dans notre raisonnement? Absolument rien, il faut juste remplacer les 3 par un n, on trouve finalement: $|X/G| = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$

Exercice 2

1. On commence par rappeler les rotations du dodecaedre. Il y en a 60:

   - L'identite
   - 4 x 6 rotations d'ordre 5 passant par deux faces opposees
   - 2 x 10 rotations d'ordre 3 passant par deux sommets opposes
   - 1 x 15 rotations d'ordre 2 passant par deux aretes opposees

   La dualite avec l'icosaedre est tres pratique pour les rotations entre deux sommets, puisque les faces de l'icosaedre sont des triangles.

2. Comment etudier ce dodecaedre tronque? L'idee clef est de remarquer que la fait de tronquer le dodecaedre n'ajoute pas de nouvelle rotation. En fait, en tronquant les sommets du dodecaedre, c'est comme si on avait colle les faces de l'icosaedre sur les sommets. Mais par la dualite dodecaedre-icosaedre, ca ne change absolument rien au groupe de rotation. Donc on sait deja que notre groupe G ne change pas. Maintenant, comment etudier les coloriages des faces decagonales associes aux coloriages des faces triangulaires du dodecaedre tronque? En fait, ca revient a etudier les coloriages des faces pentagonales et des sommets du dodecaedre original. Donc on va juste refaire le meme raisonnement que pour le cube, en ajoutant une subtilite: pour chaque $g \in G$, on considere les coloriages des faces ET des sommets qu'il fixe, donc on aura, pour chaque g, quelque chose du type $n^{nbchoixfaces} * m^{nbchoixsommets}$:

   - L'identite $= 1 * n^{12} * m^{20}$

- 4 x 6 rotations d'ordre 5 passant par deux faces opposees $= 4 * 6 * n^4 * m^4$
- 2 x 10 rotations d'ordre 3 passant par deux sommets opposes $= 2 * 10 * n^4 * m^8$
- 1 x 15 rotations d'ordre 2 passant par deux aretes opposees $= 1 * 15 * n^6 * m^{10}$

  Ainsi: $|X/G| = \frac{1}{60}(n^{12}m^{20} + 24n^4m^4 + 20n^4m^8 + 15n^6m^{10})$

Exercice 3

On commence par expliciter l'action de G sur $\mathcal{C}^X$: On sait que G agit sur X: $(g, x) \to g.x$ L'action naturelle de G sur $\mathcal{C}^X$ est donc:

$(g, col) \to g.col = col_g : x \to col(g.x)$ La verification du fait que c'est effectivement une action est laissee au lecteur avise.

1. Soit col un coloriage de X qui est fixe sous l'action de g, i.e g.col = col (donc $col(g.x) = col(x) \forall x \in X$ par definition de l'action). on veut montrer que pour une orbite de $X/g^{\mathbb{Z}}$ fixee, tous les elements de l'orbite sont de la meme couleur. Donc: $\forall O \in X/g^{\mathbb{Z}}, \forall x, y \in O, col(x) = col(y)$.

   On fixe donc $O \in X/g^{\mathbb{Z}}$ et $x, y \in O$ Alors par definition de l'orbite, $O = g^{\mathbb{Z}}.x = \{g^k.x \ , k \in \mathbb{Z}\}$ Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $y = g^k.x$. Et donc $col(y) = col(g^k.x) = (g^k.col)(x) = col(x)$ Ou on a utilise la definition de l'action et le fait que g fixe col.

2. La formule de Burnside dit: $\left|\mathcal{C}^X/G\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|(\mathcal{C}^X)^g\right|$ Attention! Ici, on considere bien l'action de G sur $\mathcal{C}^X$, pas l'action de G sur X! Pour obtenir la formule de Polya, il faut juste calculer $\left|(\mathcal{C}^X)^g\right|$ pour $g \in G$ et montrer que c'est $n^{l_X(g)}$ Dans la question precedente, on a montre que les points fixes de g, sont des coloriages tels que les points d'une meme orbite (de $X/g^{\mathbb{Z}}$ cette fois) sont de la meme couleur. En fait on a aussi l'inclusion inverse: de tels coloriages sont des points fixes de g. On doit donc calculer: $\left|\{col \in \mathcal{C}^X, \forall O \in X/g^{\mathbb{Z}}, \forall x, y \in O, col(x) = col(y)\}\right|$ On a donc autant de coloriages que de facon de colorier les $l_X(g)$ orbites de $X/g^{\mathbb{Z}}$ avec n couleurs, donc $n^{l_X(g)}$.

3. C'est assez evident puisque si X a m elements, il y a au plus m orbites pour n'importe quel $g \in G$.

4. En fait, c'est plus ou moins ce que l'on faisait quand on regardait combien de choix on avait pour les faces. Par exemples, reprenons les rotations d'ordre 2 entre deux faces du cube. Alors la face superieure constitue une orbite a elle seule puisqu'elle est fixe, pareil pour la face inferieure. Pour les faces laterales, on les a regroupe par deux en disant que l'une est envoyee sur l'autre en faisant la rotation, c'est exactement dire qu'elles appartiennent a la meme orbite! Du coup on a bien $1 + 1 + 2 = 4$ orbites, donc 3^4 points fixes. Le raisonnement est le meme pour reste.

   Que retenir de cet exo? Vous avez une methode pour calculer tous les coloriages que vous voulez pour n'importe quel solide platonicien: compter le nombre d'orbites pour chaque type de rotation puis appliquer Polya.

Amusez vous a regarder comment colorier les faces, sommets, et aretes avec f,s, et a couleurs pour les 5 solides!