

Information, Calcul et Communication Module 1 : Calcul

Objectifs de la leçon

La leçon précédente a présenté ce qu'est un algorithme et par quels moyens l'exprimer.

Mais reste la principale question :

comment concevoir un algorithme

permettant de résoudre un problème donné ?

L'objectif de cette leçon est de vous présenter des *méthodes de résolution de problèmes* :

- ▶ « Diviser pour régner » (« *Divide and Conquer* »)
- ▶ Récursion
- ▶ Programmation dynamique

Leçon I.2 : Calcul et Algorithmes II

J.-C. Chappelier & J. Sam

Conception d'algorithmes

Comment **concevoir** un algorithme permettant de résoudre un problème donné ?

Il n'y a malheureusement pas de méthode miracle ni de recette toute faite pour construire des solutions algorithmiques à un problème donné.

Une première démarche consiste à rechercher une ressemblance avec des problèmes déjà connus :

recherche *tri* *plus court chemin*

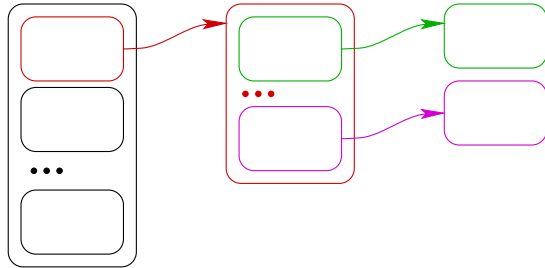
Sinon, il existe plusieurs **méthodes de résolution**, c'est-à-dire des *schémas d'élaboration de solutions*.

Plusieurs de ces méthodes suivent ce que l'on appelle **une approche descendante** (« *top-down* », procède par *analyse*), par opposition à ascendante (« *bottom-up* », procède par *synthèse*).

Approche descendante

Résoudre un problème par une **approche descendante** consiste à **décomposer** le problème général en **sous-problèmes** plus spécifiques, lesquels seront chacun décomposés en problèmes encore plus spécifiques, etc. (raffinements successifs)

Une telle analyse du problème se fait à l'aide de **blocs imbriqués** correspondant chacun à des résolutions de plus en plus **spécifiques**, décrites par des algorithmes de plus en plus spécialisés.



Exemple

Par exemple avec l'algorithme de tri par insertion vu à la leçon précédente :

On découpe le problème en sous-problèmes :

tri insertion
entrée : un tableau (d'objets que l'on peut comparer)
sortie : le tableau trié
Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Chaque **sous-problème** étant ensuite spécifié plus clairement puis résolu.

Tri par insertion : résolution détaillée

Le sous-problème **rechercher un élément mal placé**

entrée : un tableau **tab**

sortie : position du 1^{er} élément strictement plus petit que son prédécesseur

La solution est ici assez simple :

On effectue une **itération** sur les éléments de **tab** en s'arrêtant au premier élément strictement plus petit que son prédécesseur.

Comme le 1^{er} élément de **tab** ne peut être mal placé (car sans prédécesseur), l'itération de recherche d'un élément mal placé commencera à partir du 2^e élément

De même, s'il n'y a pas d'élément mal placé on retournera, par convention, la position 1.

Tri par insertion : résolution détaillée (2)

Le sous-problème **trouver la bonne place**

entrée : un tableau **tab** et l'entier **pos**, position d'un élément mal placé

sortie : la bonne position **pos_ok** de l'élément mal placé.

La « bonne position » correspond à la plus grande position **pos_ok** ($< pos$) dans le tableau **tab** telle que le (**pos_ok**-1)-ième élément de **tab** soit inférieur ou égal au **pos**-ième.

L'algorithme pour **trouver la bonne place** doit donc parcourir les éléments de **tab**, un à un, entre le premier et celui à la position **pos**, à la recherche de la bonne position.

Cet algorithme effectue donc aussi une **itération** sur les éléments du tableau, du premier élément à celui de position **pos**.

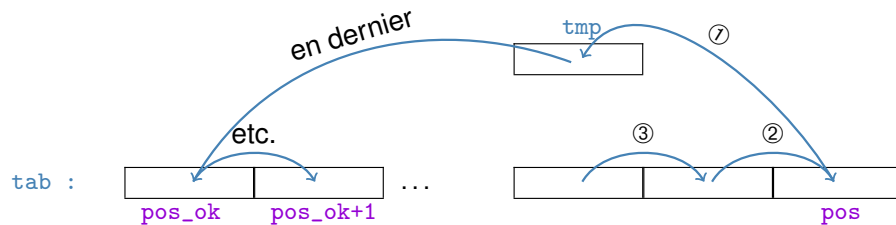
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème `déplacer un élément`

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



Synthèse

tri insertion

entrée : un tableau `T`
sortie : le tableau trié

```
pos ← mal_placé(T)
Tant que pos > 1
  pos_ok ← bonne_place(T, pos)
  déplace(T, pos, pos_ok)
  pos ← mal_placé(T)
```

avec :

mal_placé

entrée : un tableau `T`
sortie : position du premier élément mal placé

...à vous de l'écrire...

etc.

Améliorations

1. Pour `rechercher le prochain élément mal placé`, ce n'est pas la peine de recommencer du début (position 2) à chaque fois. On peut partir de *la dernière position mal placée*.
2. On pourrait `trouver la bonne place` et `déplacer l'élément` à cette place *en même temps* (i.e. en *une seule* itération)

Si l'on regroupe tout ceci, on arrive à l'algorithme suivant :

```
Pour i de 2 à N (= taille du tableau)
  tmp ← tableau[i]
  j ← i
  Tant que j ≥ 2 et tableau[j-1] > tmp
    tableau[j] ← tableau[j-1]
    j ← j-1
  tableau[j] ← tmp
```

Divide and Conquer

Parmi les méthodes descendantes, une qui est souvent mise en œuvre s'appelle « **diviser pour régner** » (divide and conquer).

Elle consiste à **diviser/regrouper les données** pour résoudre des (sous-)problèmes plus simples.

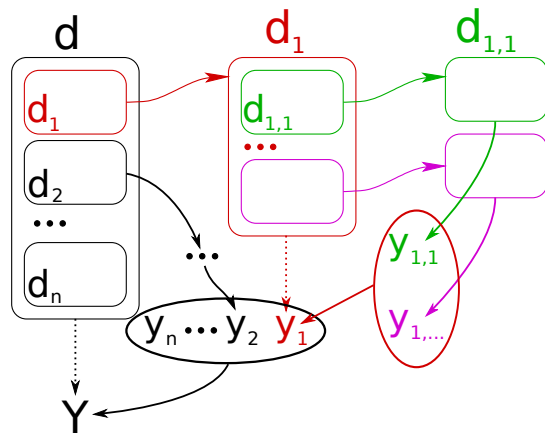
Cette idée n'est pas nouvelle :

« *Diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il soit requis pour les mieux résoudre* »

(Descartes, *Discours de la méthode*, 17^e siècle)

Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des données d , le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des données d , le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :

- ▶ si d est « assez simple », appliquer un algorithme « *ad hoc* » permettant de résoudre le problème (traitement des cas triviaux)
- ▶ sinon,
 - ▶ décomposer d en instances plus petites d_1, \dots, d_n
 - ▶ puis pour chacun des d_i : résoudre $P_i(d_i)$. On obtient alors une solution y_i
 - ▶ recombinaison des y_i pour former la solution Y au problème de départ.

☞ conduit souvent à des algorithmes récursifs

Réursion

Une catégorie particulière de méthodes de résolution de problèmes sont les solutions **récursives**.

Le principe de l'approche récursive est de

ramener le problème à résoudre à un sous-problème, version simplifiée du problème d'origine.

Exemples :

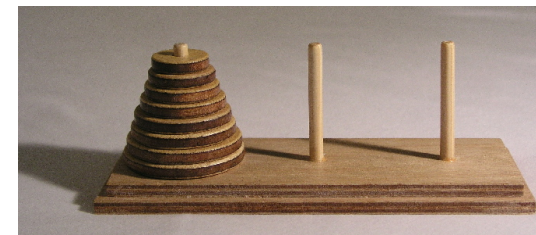
- ▶ recherche par dichotomie (cf leçon précédente)
- ▶ exemple en mathématiques : le raisonnement par récurrence
- ▶ les algorithmes dits récursifs (à suivre)

Exemple : Les tours de Hanoï

Jeu des tours de Hanoï :

déplacer d'un pilier à un autre une colonne de disques de taille croissante

- ▶ en utilisant un seul pilier de transition (c'est-à-dire 3 piliers en tout)
- ▶ en ne déplaçant qu'un seul disque à chaque fois
- ▶ en ne posant un disque que sur le sol ou sur un disque plus grand.



© User: Evanherk (Wikimedia Commons)

Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques, je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques (et je sais le faire pour une pile de 1 disque)

Démonstration :

- ▶ je déplace les n disques du haut sur le pilier de transition (en utilisant la méthode que je connais par hypothèse)
- ▶ je mets le dernier disque sur le pilier destination
- ▶ je redéplace la tour de n disques du pilier de transition au pilier destination (en utilisant à nouveau la méthode que je connais par hypothèse, et le pilier initial comme transition).

Les tours de Hanoï : algorithme

Tours de Hanoï

entrée : jeu avec pile de n disques (correctement ordonnés) sur le pilier numéro $i, i, j (\neq i)$, nombre n de disques à déplacer
sortie : jeu avec pile de n disques (correctement ordonnés) sur le pilier numéro j

Si $n > 0$

Choisir k différent de i et j (par exemple $k = 6 - i - j$)

Tours de Hanoï

entrée : jeu, $i, k, n-1$

Déplace disque du pilier i au pilier j

Tours de Hanoï

entrée : jeu, $k, j, n-1$

démo : http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Tower_of_Hanoi_4.gif

Autre(s) exemple(s)

Calculer la somme des n premiers entiers.

Si je peux le faire pour n , je peux le faire pour $n+1$:

$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

Note : se généralise trivialement au calcul de toute grandeur définie par une équation de récurrence.

Algorithme récursif

Le schéma général d'un algorithme récursif est le suivant :

monalgo_rec

entrée : entrée du problème

sortie : solution du problème

...

monalgo_rec

entrée : entrée du sous-problème

sortie : sol. du sous-problème

...

...

Exemple (incomplet) :

somme

entrée : n

sortie : $S(n)$

somme

entrée : $n-1$

sortie : m

$S(n) \leftarrow n + m$

Condition de terminaison

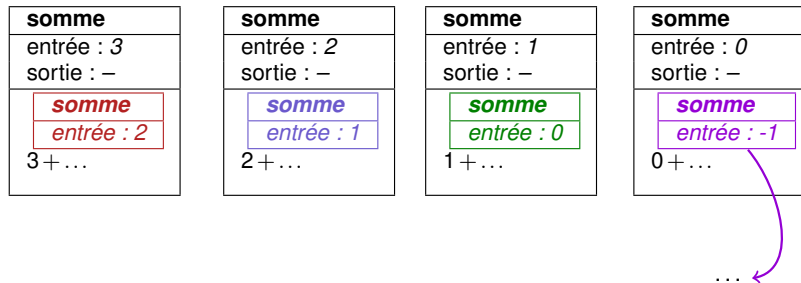


Attention ! Pour que la résolution récursive soit **correcte**, il faut une

condition de terminaison

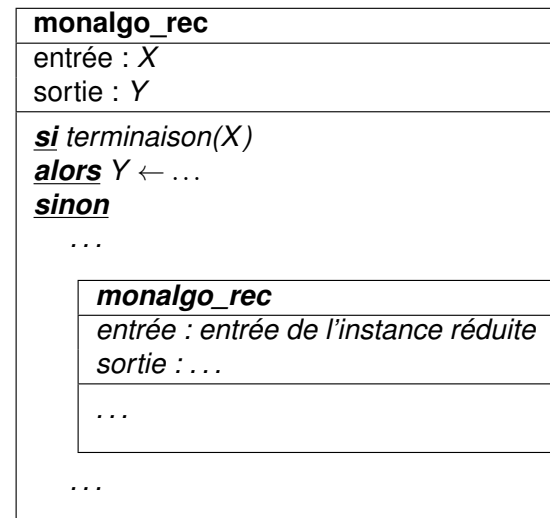
sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :



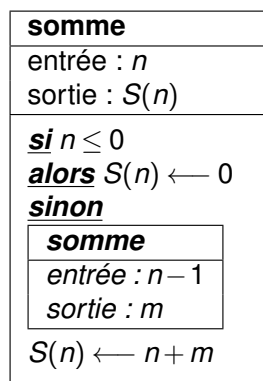
Algorithme récursif (correct)

Le schéma général **correct** d'un algorithme récursif est donc le suivant :

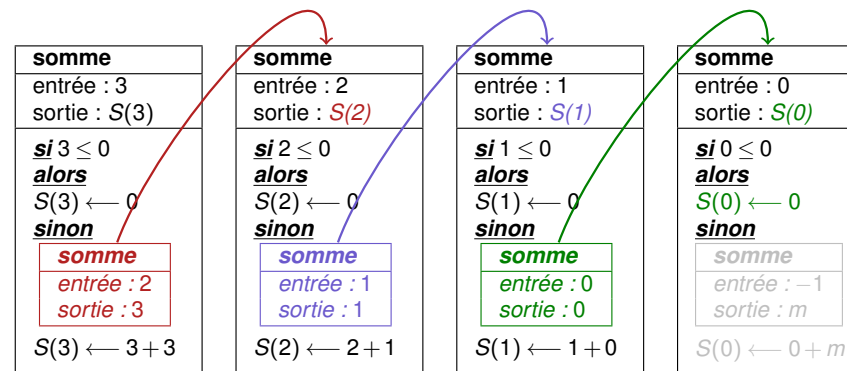


1^{er} exemple

Reprenons la somme des n premiers entiers positifs :



1^{er} exemple : déroulement



$$S(3) = 6$$

1^{er} exemple : remarques

Notez qu'il est parfois préférable d'écrire la fonction sous une autre forme que la forme récursive.

Si l'on reprend l'exemple de la somme des n premiers entiers :

$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

mais on a aussi (!) :

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i$$

(c'est-à-dire une itération) qui est plus direct que la forme récursive.

On peut parfois même utiliser une expression analytique (lorsqu'on en a une !); par exemple :

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

1^{er} exemple : complexités ?

- ▶ version récursive ?

somme
entrée : n
sortie : $S(n)$
si $n \leq 0$
alors $S(n) \leftarrow 0$
sinon
somme
entrée : $n-1$
sortie : m
$S(n) \leftarrow n + m$

- ▶ version itérative ($S(n) = \sum_{i=1}^n i$) ?

Exemple 2 : version récursive du tri par insertion

On peut aussi concevoir le tri par insertion de façon récursive :

tri
entrée : <i>tableau de n éléments</i>
sortie : <i>tableau trié</i>
<i>condition arrêt : moins de 2 éléments</i>
tri (instance réduite du problème)
entrée : <i>tableau de $n-1$ éléments</i>
sortie : <i>tableau trié</i>
...
insertion du $n^{\text{ème}}$ élément dans le tableau trié de $n-1$ éléments

Tri récursif : exemple

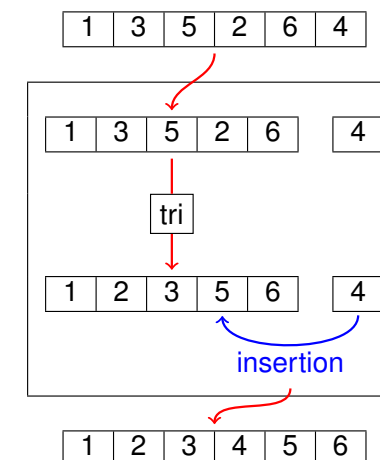
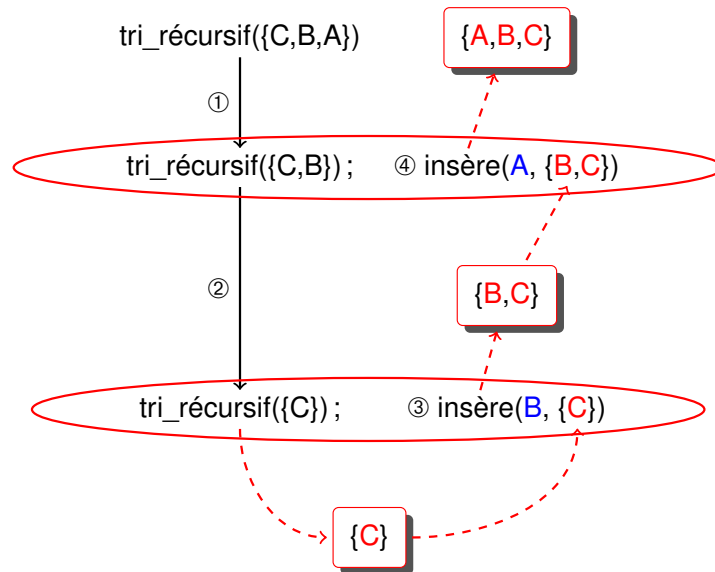


Schéma des appels récursifs (exemple)



Pour conclure sur la récursion

La solution récursive n'est pas toujours la seule solution et rarement la plus efficace...

...mais elle est parfois beaucoup **plus simple** et/ou **plus pratique** à mettre en œuvre !

Exemples : tris, traitement de structures de données récursives (e.g. arbres, graphes, ...), ...

Programmation dynamique

La **programmation dynamique** est une méthode de résolution permettant de traiter des problèmes ayant une **structure séquentielle répétitive**.

« problèmes séquentiels » : pour lesquels on doit faire un ensemble de choix **successifs**/prendre des décisions **successives** pour arriver à une solution ; au fur et à mesure que de nouvelles options sont choisies, des sous-problèmes apparaissent (aspect « séquentiel »).

- ☞ La programmation dynamique s'applique lorsqu'un **même sous-problème** apparaît (avec les mêmes données) dans **plusieurs** sous-solutions différentes.

Le principe est alors de **stocker la solution à chaque sous-problème** au cas où il réapparaîtrait plus tard dans la résolution du problème global :

On évite de calculer plusieurs fois la même chose.

Note : cette idée (programmation dynamique) peut s'appliquer aussi bien à des approches descendantes qu'ascendantes.

Programmation dynamique (2)

La programmation dynamique est souvent utilisée lorsque une solution récursive se révèle inefficace.

Elle permet souvent de changer un algorithme « naïf » coûteux en un algorithme, peut être plus complexe à concevoir, mais plus efficace.

Exemple

Prenons l'exemple du calcul des coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ (noté aussi C_n^k)

Problème $C(n, k)$:

Entrée : n , entier positif (ou nul) et k entier positif (ou nul), $k \leq n$.

Sortie : $\binom{n}{k}$

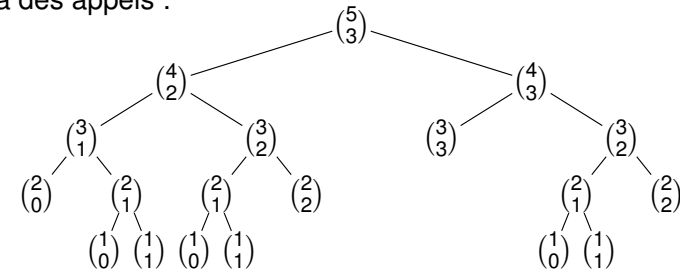
Approche récursive :

- ▶ si $k = 0$ ou $k = n$, renvoyer 1
- ▶ sinon retourner $C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$

Rappel :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Coefficients du binôme approche récursive

Schéma des appels :



Quelle est la complexité $T(k, n)$ de cette approche ?

Du fait de la récursion, on a :

(Supposons que les comparaisons et les additions soient des instructions élémentaires)

$$T(k, n) = T(k-1, n-1) + T(k, n-1) + 1$$

et d'autre part $T(0, 0) = 1$ et $T(n, n) = 1$

Coefficients du binôme approche récursive (2)

d'où :
$$T(k, n) = 2 \binom{n}{k} - 1$$

↳ temps **exponentiel** en fonction de n

Y'a-t-il une meilleure solution ?

Idée : ne pas recalculer plusieurs fois la même chose

(Regardez par exemple combien de fois nous avons calculé $\binom{4}{1}$!)

↳ stocker dans un **tableau** les valeurs déjà calculées et utiles pour la suite.

(on parle de *mémoïsation/memoization*)

Coefficients du binôme par programmation dynamique

« tabuler les valeurs déjà calculées »

↳ Concrètement ici : le triangle de Pascal :

		j			
				k	
		1			
		1	1		
		1	2	1	
		1	3	3	1
		1	4	6	4
		1	5	10	10
	i				
	n				

Calcul par programmation dynamique du coefficient $\binom{n}{k}$:

- ▶ On remplit le début (k éléments) de chaque ligne du triangle de Pascal, une après l'autre, de haut en bas.
- ▶ On arrête à la ligne n .

Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Coefficients du binôme programmation dynamique (2)

Le nombre d'opération le plus grand est requis lorsque $k = n - 1$
(on aurait pu utiliser la symétrie, mais cela ne change pas fondamentalement le propos)

Dans ce cas, le nombre d'opérations effectuées est :

$$\begin{aligned}
 &1 + (1+1) + (1+1+1) + (1+1+1+1) \\
 &+ \dots + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n-1} = n+1 + n-1 + \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 1 \\
 &= 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2}n^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)n
 \end{aligned}$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser tout le tableau, $k - 1$ cases suffisent (pourriez-vous trouver l'algorithme ?)

Programmation Dynamique – Autre exemple

Calcul du **plus court chemin**, par exemple entre toutes les gares du réseau CFF

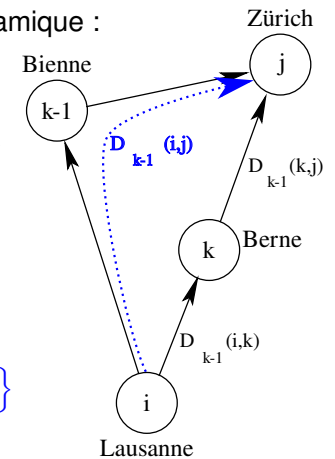
Voyons une solution par programmation dynamique :
l'Algorithme de Floyd

illustration de l'idée de base :

le plus court chemin pour aller de Lausanne à Zürich est le minimum entre :

1. le plus court chemin connu pour aller de Lausanne à Zürich,
2. le chemin allant de Lausanne à Zürich en passant par une ville intermédiaire non encore considérée.

$$D_k(i,j) = \min \{ D_{k-1}(i,j), D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \}$$



Programmation Dynamique Autre exemple (2)

L'algorithme est donc le suivant, pour n gares dans le réseau :

Initialisation :

Pour i de 1 à n

 Pour j de 1 à n

$D(i,j) \leftarrow$ distance *directe* de i à j , ∞ si i et j ne sont pas directement connectés

Déroulement :

Pour k de 1 à n

 Pour i de 1 à n

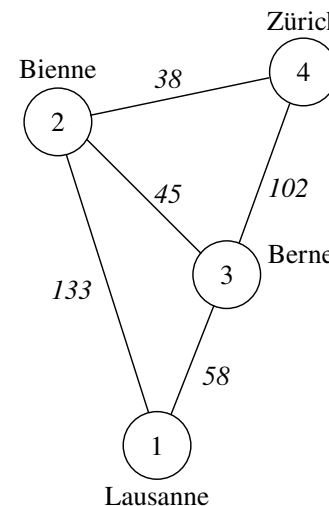
 Pour j de 1 à n

$D(i,j) \leftarrow \min \{ D(i,j), D(i,k) + D(k,j) \}$

Combien de boucles ?

$\mathcal{O}(n^3)$

Algorithme de Floyd : exemple



$$D_1 = D_0 =$$

Lausanne	Biene	Berne	Zürich
0	133	58	∞
133	0	45	38
58	45	0	102
∞	38	102	0

$$D_2 =$$

Lausanne	Biene	Berne	Zürich
0	133	58	171
133	0	45	38
58	45	0	83
171	38	83	0

$$D_4 = D_3 =$$

Lausanne	Biene	Berne	Zürich
0	103	58	141
103	0	45	38
58	45	0	83
141	38	83	0

(données fictives)

Note : fonctionne aussi pour des graphes asymétriques (graphes orientés)

Algorithmes de plus court chemin

L'algorithme de Floyd présenté ici résout en $\mathcal{O}(n^3)$ étapes le problème du plus court chemin entre toutes les paires de gares

En appliquant le même genre d'idées (programmation dynamique) :

- ▶ l'algorithme de Dijkstra résout en $\mathcal{O}(n^2)$ le problème du plus court chemin entre une gare donnée et toutes les autres
- ▶ l'algorithme A* (« A star ») est une généralisation de l'algorithme de Dijkstra qui est plus efficace si l'on possède un moyen d'estimer une borne inférieure de la distance restant à parcourir pour arriver au but (on appelle cela une « heuristique admissible » ; Dijkstra est un A* avec l'heuristique nulle)
- ▶ l'algorithme de Viterbi résout en $\mathcal{O}(n)$ le problème du plus court chemin entre deux gares données (sans cycle : DAG)
- ▶ ...et il existe plein d'autres algorithmes en fonctions des conditions spécifiques (graphe orienté/non orienté, coût positifs ou quelconques, graphe à cycles ou sans cycle)

Conclusion (1)

Formalisation des données : **structures de données abstraites**

Formalisation des traitements : **algorithmes**

- ☞ trouver des solutions correctes et distinguer formellement les solutions efficaces de celles inefficaces

Problèmes typiques : recherche, tris, plus « court » chemin.

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

Conclusion (2)

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

- ☞ Il n'y a pas de recette miracle pour cela, mais il existe des grandes familles de stratégies de résolution :
- ▶ **décomposer** (« Divide and Conquer ») : essayer de résoudre le problème en le **décomposant en instances plus simples**
Les algorithmes **récurifs** sont des illustrations de cette stratégie.
- ▶ **regrouper** (« programmation dynamique ») : **mémoriser les calculs intermédiaires** pour **éviter de les effectuer plusieurs fois**

La suite

- ▶ La prochaine leçon :
Qu'est-ce qui est calculable et ne l'est pas ?
- ▶ Puis :
Comment représenter l'information (les données sur lesquelles calculer) ?