EPFL Printemps 2020
Geometrie, MATH-125

Série 3

Groupes quotients

Exercice 1 (sur les groupes quotients)**.** Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe distingue de G et G/H le groupe quotient. Soit

$$\mathrm{red}_H : g \in G \twoheadrightarrow g.H \in G/H$$

la reduction modulo H (on rappelle que c'est un morphisme de groupe surjectif).

1. Montrer que l'application $\mathrm{red}_H : G \to G/H$ induit une bijection entre
   (a) L'ensemble des sous-groupes de G contenant H.
   (b) L'ensemble des sous-groupes de G/H.
2. Meme question si on demande que les sous-groupes soient distingues de part et d'autre.

La formule de Polya (simplifiee)

Exercice 2. Soit $G \curvearrowright X$ un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal m. Soit $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ un ensemble de n couleurs ; avec ces n couleurs on peut colorier chacun des elements de X. L'ensemble des coloriages possibles est en bijection avec l'ensemble

$$\mathcal{F}(X; C) = C^X$$

des applications de X vers C : en effet se donner un coloriage de X est equivalent a se donner d'une application $col : X \mapsto C$ qui a a chaque element x de X associe sa couleur $col(x)$.

Comme le groupe G agit sur X, il agit l'ensemble des coloriages de X : la formule de Polya permet de calculer le nombre d'orbites de $G \curvearrowright C^X$.

Pour cela on a besoin d'introduire la fonction "nombre de cycles" (ou nombre d'orbites) d'un element $g \in G$ agissant sur X :

Définition 1. *Soit $G \curvearrowright X$ un groupe fini agissant sur un ensemble X, et $g \in G$ un element de G, le nombre de cycles de g (relatif a l'action $G \curvearrowright X$) est*

$$l_X(g) := |g^{\mathbb{Z}} \backslash X|,$$

le nombre d'orbites dans X du sous-groupe $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}$ de G engendre par g.

Par exemple si $g = e_G$, $g^{\mathbb{Z}} = \{e_G\}$ est le groupe trivial qui possede exactement $m = |X|$ orbites (chaque point de X).

1. Montrer que si *col* est un coloriage de X qui est un point fixe sous l'action de g alors les elements d'une orbite de $g^{\mathbb{Z}}$ dans X sont tous d'une meme couleur. Montrer que le nombre de points fixes de $g \in G$ agissant sur C^X vaut $n^{l_X(g)}$.
2. En deduire la formule de Polya (simplifiee)
$$|G \backslash C^X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{l_X(g)}.$$
3. Montrer que le nombre de G-orbites de l'ensemble des coloriages de X ayant au plus n couleurs est un polynome en n de degre $\leqslant m$.
4. Retrouver les resultats des exercices de coloriage des series precedentes.

La sphere de Riemann

Dans cette series d'exercices on revisite la sphere de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ et les transformations de Moebius que vous avez deja pu apercevoir dans le film de Douglas Arnold et Jonathan Rognes

`https://www.youtube.com/watch?v=0z1fIsUNhO4`

Exercice 3. (La sphere de Riemann) La sphere de Riemann est la reunion disjointe du plan complexe $\mathbb{C}$ et d'un point supplementaire dit "point a l'infini" :

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

On considere le groupe

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),\ ad - bc \neq 0\}$$

des matrices complexes 2×2 inversibles et etant donne $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on definit

$$\gamma.z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ et } cz+d \neq 0 \\ \infty & \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ et } cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = \infty \text{ et } c = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $(\gamma, z) \mapsto \gamma.z$ definit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
   Les transformations de $\widehat{\mathbb{C}}$
   $$\gamma. : z \in \widehat{\mathbb{C}} \mapsto \gamma.z$$
   s'appellent les transformations de Moebius ou homographies.
2. Quel est le noyau de cette action.
3. Quel est le stabilisateur du point ∞, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_\infty$? Du point i, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_i$?
4. On dit que les matrices de la forme
   $$\lambda. \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}^\times, \ w \in \mathbb{C}$$
   agissent par translation. Pourquoi ?
5. On dit que les matrices de la forme
   $$\lambda. \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}^\times, \alpha \in \mathbb{C}^1$$
   agissent par rotations. Pourquoi ?

Exercice 4. 1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

2. Montrer que etant donne 2 triplets de points *distincts* $(z_1, z_2, z_3), \ (w_1, w_2, w_3) \in \widehat{\mathbb{C}}^3$, il existe $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que
   $$\gamma.z_1 = w_1, \ \gamma.z_2 = w_2, \ \gamma.z_3 = w_3$$
   (on dit que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit 3-transitivement sur $\widehat{\mathbb{C}}$.)
   On pourra commencer par montrer cela pour $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$.
3. Quel est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui fixe ∞ ? qui fixe 0 et ∞ ? qui fixe $0, 1$ et ∞ ?
4. Etant donne 2 triplets de points *distincts* $(z_1, z_2, z_3), \ (w_1, w_2, w_3) \in \widehat{\mathbb{C}}^3$. Montrer que si deux matrices γ et γ' envoient (z_1, z_2, z_3) sur (w_1, w_2, w_3) alors $\gamma'.\gamma^{-1}$ est une matrice scalaire ($\lambda\mathrm{Id}, \ \lambda \in \mathbb{C}^\times$). On commencera par le cas $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$.

Exercice 5. On considere l'action (par restriction) du sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices reelles de determinant 1 sur la sphere de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. Montrer que l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \widehat{\mathbb{C}}$ a exactement 3 orbites :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z > 0\},\ \mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z < 0\},\ \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Action sur les tuiles

Exercice 6. Soit $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble et φ une isometrie. On note $\varphi(\mathbf{P})$ ou $\varphi.\mathbf{P}$ l'image de $\mathbf{P}$ par φ

$$\varphi(\mathbf{P}) = \varphi.\mathbf{P} = \{\varphi(P),\ P \in \mathbf{P}\}.$$

Montrer que

1. l'image de l'interieur est l'interieur de l'image

$$\varphi(\mathbf{P})^\circ = \varphi(\mathbf{P}^\circ),$$

2. l'image du bord est le bord de l'image

$$\partial\varphi(\mathbf{P}) = \varphi(\partial\mathbf{P}).$$

3. Si on defini une tuile comme un compact de $\mathbb{R}^2$ d'interieur non-vide, montrer que l'image d'une tuile est une tuile.
4. Soit $\mathcal{P} = (\mathbf{P}, \mathrm{Is})$ un pavage du plan avec une seule tuile. Montrer que $\varphi\mathcal{F} = (\mathbf{P}, \varphi \circ \mathrm{Is})$ est encore un pavage.
5. L'image du simplexe $\overline{ABC}$ est le simplexe $\varphi(\overline{ABC}) = \overline{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)}$ (un simplexe de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des barycentres de poids $\geqslant 0$ de trois points non-alignes $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, cad le triangle plein de sommet ces trois points).
6. Montrer que tout ceci reste vrai si φ est seulement une transformation affine.