EPFL Mars 2020
Geometrie, MATH-125

Corrigé de la série 3

Exercice. 1

On rappelle ce qu'est la notion de groupe quotient ${}^{G}\!/_{H}$*. Soit* G *un groupe et* H *un sous-groupe normal. On sait que comme ensembles* ${}^{G}\!/_{H} = \{gH \subset G : g \in G\}$*. Lorsque* H *est un sous-groupe normal , l'ensemble* ${}^{G}\!/_{H}$ *muni de la loi* $xHyH = xyH$ *pour deux classe à gauche* xH *et* yH *de* ${}^{G}\!/_{H}$ *forme un groupe.*

Cette opération est bien défini en tant loi de composition de groupe uniquement si H *est distingué dans* G*.*

On rappelle que l'on doit démontrer l'existence d'un isomorphisme induit par la réduction modulo H *entre l'ensemble des sous-groupes de* G *contenant* H *que l'on notera* X *et celui des sous-groupes de* ${}^{G}\!/_{H}$ *que l'on notera* Y*.*

Quelle est l'heuristique ? On essai de généraliser red_H *aux sous-groupes de* G *contenant* H*.*

On défini l'application $\Psi : X \longrightarrow Y$ *par* $\Psi(S) = \mathrm{red}_H(S) = \{\mathrm{red}_H(s) : s \in S\}$*. Observons qu'il n'est pas immédiat que* $\Psi(S)$ *est un élément de* Y *pour* S *dans* X*. Ainsi vérifions que* $\Psi(S)$ *forme bien un sous-groupe de* ${}^{G}\!/_{H}$*. Premièrement,* $\Psi(S) \neq \emptyset$ *car* $H = \mathrm{red}_H(e) \in \Psi(S)$*. Soit* $x, y \in \Psi(S)$*, on a, par le fait que* red_H *est surjective, qu'il existe* $s_x, s_y \in S$ *avec* $x = \mathrm{red}_H(s_x) = s_xH$ *et* $y = \mathrm{red}_H(s_y) = s_yH$*. Donc,* $xy = s_xs_yH = \mathrm{red}_H(s_xs_y)$*, et l'on a en effet que* $s_xs_y \in S$ *puisque que c'est un sous-groupe. De même pour* $x^{-1} = s_x^{-1}H = \mathrm{red}_H(s_x^{-1})$*.*

Maintenant il nous suffit de montrer que Ψ *est bien une bijection.*
Soient $Z, W \in X$ *avec* $\Psi(Z) = \Psi(W)$ *et* $z \in Z$*. Alors* $zH \in \Psi(Z) = \Psi(W)$ *donc il existe* $w \in W$ *avec* $wH = zH$ *en particulier* $w^{-1}z \in H \subset W$ *donc* $z \in W$ *et* $Z \subset W$ *en échangeant les rôles de* W *et* Z *on obtient l'inclusion inverse et donc* $W = Z$*. L'application* Ψ *est donc injective.*
Soit $S^* \in Y$*, vérifions que* $\Psi^{-1}(S^*) = \{x \in G : \mathrm{red}_H(x) \in S^*\}$*. Il suffit de vérifier que l'ensemble décrit forme bien un élement de* X*. L'ensemble est non vide car* e *y appartient (*$\mathrm{red}_H(e) = eH = H \in S^*$*). Soit* $x, y \in \{z \in G : \mathrm{red}_H(z) \in S^*\}$ *on a que* $\mathrm{red}_H(x)\mathrm{red}_H(y) = xyH = \mathrm{red}_H(xy) \in S^*$ *ainsi* $xy \in \{z \in G : \mathrm{red}_H(z) \in S^*\}$ *finalement* $\mathrm{red}_H(x^{-1}) = x^{-1}H = (xH)^{-1} \in S^*$*. Donc* Ψ *est surjective.*

La démonstration pour les ensembles de sous-groupes normaux est exactement la même. Il suffit de vérifier la "condition de normalité" à chaque fois.

Notons $X' = \{S \in X : S \triangleleft G\}$ *et* $Y' = \{S \in Y : S \triangleleft {}^{G}\!/_{H}\}$, ψ *la restriction de* Ψ *à* X'. *Immédiatement,* ψ *est injective. Vérifions qu'elle est surjective dans* Y'.
Si $x \in {}^{G}\!/_{H}$, *il existe* $g_x \in G$ *avec* $x = \mathrm{red}_H(g_x) = g_xH$ *en particulier pour* $sH \in \psi(S)$ *et* $S \in X'$ *on a :*

$$x(sH)x^{-1} = g_xHsHg_x^{-1}H = (g_xsg_x^{-1})H \in \psi(S).$$

En effet $g_xsg_x^{-1} \in S$ *car* $S \triangleleft G$. *Donc* $\psi(S) \triangleleft {}^{G}\!/_{H}$. *Soit* $S^* \triangleleft {}^{G}\!/_{H}$, *vérifions que* $\psi^{-1}(S^*) \triangleleft G$. *Soient* $g \in G$ *est* $x \in \psi^{-1}(S^*)$ *on a que* $gxg^{-1} \in \psi^{-1}(S^*)$, *en effet :*

$$gxg^{-1}H = (gH)(xH)(g^{-1}H) \in S^* \text{ car } S^* \triangleleft {}^{G}\!/_{H}.$$

Exercice. 2

Rapidement, si col *est un point fixe alors si* $x \in X$ $g.\mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(gx) = \mathrm{col}(x)$, *en particulier* $g^{\mathbb{Z}}\mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(g^{\mathbb{Z}}x) = \mathrm{col}(x)$ *et tout les éléments d'une même orbite sont coloriés identiquement. Un point fixe de l'action de* $g \in G$ *sur* C^X *correspond a un coloriage de chaque orbites on a donc que le nombre de points fixe est le nombre de coloriage réalisable sur* $l_X(g)$ *orbites avec* n *couleurs c'est à dire* $n^{l_X(g)}$. *Il suffit d'appliquer Burnside pour obtenir la formule de Polya (simplifié). Cette formule donne le fait que le nombre de* G *orbites est un polynôme en* n, *de plus,* $l_X(g) \leqslant m = |X|$ *par définition.*

Exercice. 3

Commençons par observer comment l'application de "produit" est définie. On voit que les comportement impliquant des ∞ *sont disposé avec des conditions qui représente l'idée suivante :*
Dans la mesure où l'on traite uniquement des complexes et que le dénominateur est non nul

$$\gamma.z = \frac{\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}\right]_{1,1}}{\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}\right]_{2,1}}.$$

Pour traiter les cas limites (dénominateur nul, infini...). On procède par limite :

$$\gamma.\infty = \lim_{|z|\to\infty} \gamma.z,$$

$$\lim_{|z|\to 0} |\gamma.z| \text{ (si le dénominateur est nul).}$$

A partir d'ici les axiomes définissant une action de groupe en tant qu'application $(G \times X) \longrightarrow X$ *découle directement du fait que la multiplication de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *est associative.*

On corrigera uniquement la question portant sur les stabilisateurs. Cherchons le stabilisateur de ∞ *:*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_\infty = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : \gamma.\infty = \infty\} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : c = 0\} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\}.$$

Si i et ∞ sont dans la même orbites alors leurs stabilisateurs sont conjugués. Si ce n'est pas évident, regardez la démonstration du théorème orbite-stabilisateur. Si l'on pose $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ *on observe que* $\alpha.i = \infty$*. Immédiatement,*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_i = \alpha^{-1}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_\infty \alpha = \{ \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \}.$$

Exercice. 4

On démontrera uniquement la 3-transitivité, la transitivité étant une conséquence directe. Prenons en compte la notation $\gamma.(x, y, z) = (\gamma x, \gamma y, \gamma z)$*. Si cette notation ne vous semble pas intuitive rappelez vous comment induire une action de* G *sur* X^n *depuis une action de* G *sur* X*.*

Pourquoi peut on se restreindre à démontrer que pour tout triplet d'éléments distincts $(z_1, z_2, z_3) \in \widehat{\mathbb{C}}$*, il existe une matrice* $\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *avec* $\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)}.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$ *?*
Soit deux triplets d'éléments distincts $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \widehat{\mathbb{C}}$ *on a :*

$$(\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)})^{-1}\gamma^{(0,1,\infty)}_{(w_1,w_2,w_3)}(w_1, w_2, w_3) = (\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)})^{-1}(0, 1, \infty) = (z_1, z_2, z_3)$$

Maintenant démontrons cette assertion, on distingue quatre cas relatifs à la potentielle position d'infini.
Dans le cas (z_1, z_2, z_3) *avec* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *distincts, on a les conditions suivantes :*
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.z_3 = \infty$ *donc* $d = -cz_3$,
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -cz_3 \end{bmatrix}.z_1 = 0$ *donc* $b = -az_1$,
$\begin{bmatrix} a & -az_1 \\ c & -cz_3 \end{bmatrix}.z_1 = \frac{az_2 - az_1}{cz_2 - cz_3} = 1$ *donc* $c = a\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$,
$\begin{vmatrix} a & -az_1 \\ a\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & -az_3\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} \end{vmatrix} \neq 0$ *donc* $a \neq 0$.
Ainsi, la matrice $\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)} = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & -z_3\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} \end{bmatrix}$ *satisfait* $\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,z_3)}.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$.
Par limite on obtient :
$\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,z_2,\infty)} = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$,
$\gamma^{(0,1,\infty)}_{(z_1,\infty,z_3)} = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ 1 & -z_3 \end{bmatrix}$,
$\gamma^{(0,1,\infty)}_{(\infty,z_2,z_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_2 - z_3 & -z_3 \end{bmatrix}$ *(Pour celui-ci on procèdera comme pour celui n'impliquant que des complexes).*

Les éléments γ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *fixant* $(0, 1, \infty)$ *sont ceux de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_0 \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_1 \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_\infty =$

$\mathbb{C}^{\times}.\mathrm{Id}_2$

Supposons que $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *sont telles que* $\gamma.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$, $\gamma'.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$ *on a en particulier que*

$$\gamma'.\gamma^{-1}(0, 1, \infty) = \gamma'.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$$

donc $\gamma'.\gamma^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_{(0,1,\infty)} = \mathbb{C}^{\times}.\mathrm{Id}_2$.
Maintenant si $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *sont telles que* $\gamma.(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3)$, $\gamma'.(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3)$, *il existe* $\Gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *avec* $\Gamma.(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$ *ainsi* $\Gamma\gamma, \Gamma\gamma'$ *respectent* $\Gamma\gamma.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$, $\Gamma\gamma'.(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$ *donc* $\Gamma\gamma'.(\Gamma\gamma)^{-1} = \Gamma\gamma'.\gamma^{-1}\Gamma^{-1} \in \mathbb{C}^{\times}.\mathrm{Id}_2$. *En tant que noyau d'un homomorphisme* $\mathbb{C}^{\times}.\mathrm{Id}_2$ *est normal dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *de ce fait* $\gamma'.\gamma^{-1} \in \mathbb{C}^{\times}.\mathrm{Id}_2$.

Exercice. 5

Rapidement, on peut utiliser la caractérisation suivante de la partie imaginaire d'un nombre complexe $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ *pour obtenir :*

$$\mathrm{Im}(\gamma z) = \frac{z - \overline{z}}{2i|cz + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

À partir d'ici on en déduis directement le résultat.

Exercice. 6

Il existe deux approches pour cet exercice. Considérer les définitions des notions employé comme des définitions dans un espace métrique (pour les amateurs de ϵ, δ*), utilisé un point de vu topologique (plus élégant).*

Commençons par le point de vue 'métrique'. Une propriété essentielle des isométries est qu'elles envoient les boules sur les mêmes boules. Soit φ *une isométrie en deux espaces métriques* (X, d) *et* (Y, d'). *Soient* $x \in X$ *et* $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, *l'application* φ *est une isométrie donc* $\varphi(B_d(x, \delta)) = B_{d'}(\varphi(x), \delta)$ *(la preuve est une classique double inclusion).*

Démontrons que $\varphi(\mathrm{int}(P)) = \mathrm{int}(\varphi(P))$. *Soit* $x \in \varphi(\mathrm{int}(P))$ *on a que* $x = \varphi(y)$ *avec* $y \in \mathrm{int}(P)$ *donc il existe* $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ *avec* $B_d(y, \delta) \subset P$ *on a donc que* $\varphi(B_d(y, \delta)) = B_{d'}(x, \delta) \subset \varphi(P)$ *et donc* $x \in \mathrm{int}(\varphi(P))$. *Ainsi* $\varphi(\mathrm{int}(P)) \subset \mathrm{int}(\varphi(P))$.
Soit $x \in \mathrm{int}(\varphi(P))$ *on a qu'il existe* $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $B_d(x, \delta) \in \varphi(P)$. *Soit* $y = \varphi^{-1}(x)$ *on a* $\varphi^{-1}(B_{d'}(y, \delta)) = B_d(y, \delta)$ *ainsi* $y \in \mathrm{int}(P)$ *et* $x \in \varphi(\mathrm{int}(P))$. *Finalement,* $\mathrm{int}(\varphi(P)) \subset \varphi(\mathrm{int}(P))$ *et* $\varphi(\mathrm{int}(P)) = \mathrm{int}(\varphi(P))$.

Démontrons que $\partial\varphi(P) = \varphi(\partial P)$. *Soient* $x \in \partial\varphi(P)$, $y = \varphi^{-1}(x)$ *et* $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. *La boule* $B_d(y, \epsilon) = \varphi^{-1}(B_{d'}(x, \epsilon))$ *or* $x \in \partial\varphi(P)$ *donc* $B_{d'}(x, \epsilon) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$ *et* $B_{d'}(x, \epsilon) \cap \varphi(P)^c \neq \emptyset$.

On choisit $a \in B_{d'}(x,\epsilon) \cap \varphi(P)$ *et* $b \in B_{d'}(x,\epsilon) \cap \varphi(P)^c$ *on constate que* $\varphi^{-1}(a) \in B_d(y,\epsilon) \cap P$ *et* $\varphi^{-1}(b) \in B_d(y,\epsilon) \cap P^c$ *donc* $B_d(y,\epsilon) \cap P \neq \emptyset$ *et* $B_d(y,\epsilon) \cap P^c \neq \emptyset$. *Finalement* $\partial\varphi(P) \subset \varphi(\partial P)$.
Soient $x \in \varphi(\partial P)$, $y = \varphi(x)$ *et* $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. *On a que* $B_d(x,\epsilon) \cap P \neq \emptyset$ *et* $B_d(x,\epsilon) \cap P^c \neq \emptyset$ *puisque* $\varphi(B_d(x,\epsilon)) = B_{d'}(y,\epsilon)$ *on a* $B_{d'}(y,\epsilon) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$ *et* $B_{d'}(y,\epsilon) \cap \varphi(P)^c \neq \emptyset$ *par le même argument que ci-dessus. Finalement,* $\varphi(\partial P) \subset \partial\varphi(P)$ *et* $\partial\varphi(P) = \varphi(\partial P)$.

Si l'on défini une tuile comme un compact d'intérieur non-vide. Son image par une isométrie aura certainement un intérieur non vide par la relation sur les intérieurs démontré ci-dessus. De plus, l'adhérence d'un sous ensemble est l'union de son intérieur et de sa frontière et de l'ensemble des ses points isolés par les relations ci-dessus l'adhérence d'un sous-ensemble est envoyé sur l'adhérence de l'image (le cas des points isolés est satisfait les points isolés sont envoyés sur des points isolés). En particulier un fermé sera égal à son adhérence et donc l'image d'un fermé est un fermé. L'image d'un borné par une isométrie reste évidemment borné (il suffit d'observer l'image de la boule contenant le ci-dit ensemble). L'image d'un compact non-vide par une isométrie est bien un compact non-vide.

Deux remarques, la première est que la définition d'une tuile comme un compact d'intérieur non-vide est très abstraite et permet de nombreuses choses. Les plus motivés pourront essayer de comprendre pourquoi la frontière d'une telle tuile peut-être (vraiment) complexe. Deuxièmement constatez ici, qu'on utilise le fait qu'un compact de $\mathbb{R}^n$ *soit un fermé, borné. La définition (topologique) n'est pas celle-ci, pour comprendre pourquoi on a fait cette identification allez voir le théorème de Heine-Borel-Lesbegue (et tenter de le démontrer pour les plus volontaires).*

Comme promis voici la résolution avec des arguments topologiques. Une isométrie est un homéomorphisme d'espace topologique (en effet les boules forment une base des ouverts de $\mathbb{R}^n$*) . En particulier, c'est une application ouverte et fermée. L'intérieur, comme l'intersection de tout les ouverts contenus dans l'ensemble* P*, est préservé par cette application, en pratique la preuve utilise le même raisonnement que ce qui est fait plus haut, on démontre la double inclusion en montrant que l'image (resp. préimage) est ouverte contenu dans l'ensemble souhaité. De même pour l'adhérence (intersection de tout les fermés contenant* P*) . Ainsi la frontière en tant qu'adhérence auquel on a retranché cette intérieur est préservé. De plus l'image d'un compact par un homéomorphisme est un compact (pour tout recouvrement par des ouverts de l'image considérer le recouvrement du domaine de l'application continue constitué des pré-images des ouverts constituant le recouvrement, le domaine est compact donc on peut tirer du recouvrement que l'on a construit un sous-recouvrement fini ce dernier engendre un sous-recouvrement de l'image juste en prenant les images de chaque ouvert). L'image d'une tuile par un homéomorphisme reste une tuile donc, en particulier l'image d'une tuile par une isométrie est une tuile.*

On a vu en cours de "Géométrie I" que les applications préservant les barycentres sont les applications affines. Il est clair qu'une application affine envoie un simplexe sur un *simplexe en effet ce sont des ensembles de barycentres. Si ce n'est pas clair, effectuer la double inclusion entre les ensembles :*

$$\{\mathrm{Bar}(\alpha, \beta, \lambda, A, B, C) : \alpha + \beta + \lambda = 1, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_+\},$$

$$\{\mathrm{Bar}(\alpha, \beta, \lambda, \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) : \alpha + \beta + \lambda = 1, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

On pourra utiliser $\varphi(\mathrm{Bar}(\Lambda, P)) = \mathrm{Bar}(\Lambda, \varphi(P))$ *dans le cas de* φ *affine.*
Une isométrie du plan ayant été caractérisé comme une application affine, elle respecte ces propriétés.