Série 5

1 Qu'est-ce qui est difficile?

Ci-dessous, vous trouverez une liste de problèmes qu'on peut demander aujourd'hui à un ordinateur de résoudre. Le but de cet exercice est de classer ces problèmes par ordre de difficulté (par "difficulté", on entend ici le temps que mettrait un même ordinateur à résoudre le problème. Vous pouvez essayer de l'approximer par la difficulté que vous auriez vous-même à résoudre le problème à la main, ou vous baser sur ce que vous avez déjà vu en cours).

Problème a) Soit x un nombre entier composé de 20 chiffres (exemple: $x = 69262832689376392871$). Identifier si ce nombre est un nombre premier ou pas.

Problème b) Additionner deux nombres entiers x et y, chacun composé de 20 chiffres.

Problème c) Multiplier deux nombres entiers x et y, chacun composé de 20 chiffres.

Problème d) Soit L une liste de 20 nombres réels arbitraires (mais tous distincts). Exemple:

$$L = \{4,\ 5.5,\ -4,\ 10,\ 0,\ 1200,\ 47,\ 25,\ -707,\ 101,\ 18,\ 7.12,\ 3.14,\ -2,\ 18,\ 14,\ 3,\ 2.71828,\ -700, 1\}$$

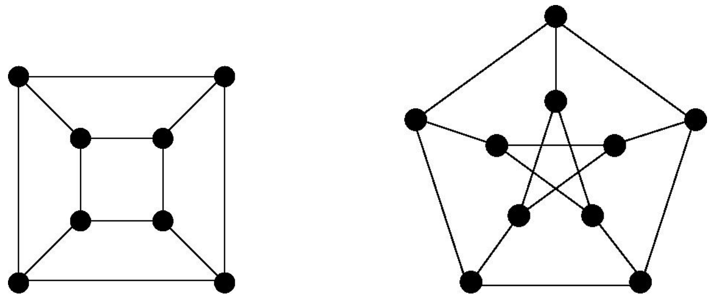
Trier cette liste dans l'ordre croissant.

Problème e) Soit L une liste triée de 20 nombre réels. Quelqu'un choisit un nombre au hasard dans cette liste. Le but est de deviner quel nombre cette personne a choisi en posant des questions auxquelles la personne ne peut répondre que par oui ou par non (vous pouvez essayer ça avec votre voisin!).

Problème f) Etant donné une position au jeu d'échecs, déterminer quel est le meilleur coup à jouer pour se retrouver dans la position la plus favorable possible 20 coups après.

2 Coloration de graphes

On considère un graphe avec n sommets et un certain nombre d'arêtes qui relient ces sommets, comme par exemple un des deux graphes suivants:



On se pose la question générale suivante:

Soit $k \geq 2$ un nombre fixé. Avec k couleurs différentes à disposition, est-il possible de colorier les sommets d'un graphe donné de façon à ce que si deux sommets sont reliés par une arête, alors ils aient toujours des couleurs différentes?

Avant d'aller plus loin, voici une petite application pour le cas où $k = 2$: n joueurs se retrouvent ensemble et désirent former deux équipes (pas forcément de même taille: ça simplifie le problème). Seule contrainte: un graphe comme le graphe ci-dessus indique les joueurs qui ne s'aiment pas et ne veulent donc pas faire partie de la même équipe: plus précisément, i n'aime pas j si et seulement si i et j sont reliés directement par une arête. Est-il possible de former deux équipes avec des joueurs qui n'ont aucune inimitié à l'intérieur de chaque équipe?

a) Quelle est la réponse à cette question pour chacun des graphe ci-dessus (dans le cas où $k = 2$)?

Faisons maintenant un petit calcul ensemble: pour résoudre la question en général pour un n et un k donnés, on a toujours l'option d'essayer *toutes* les possibilités de coloriages du graphe. Combien sont-elles, ces possibilités? Vu qu'on a k choix pour chacun des n sommets, on a en tout k^n possibilités, autement dit un nombre qui croît exponentiellement en n. Si n est grand, essayer toutes les possibilités prend clairement trop de temps (même pour $k = 2$).

b) Considérons tout d'abord le cas particulier $k = 2$ et supposons que vous deviez trouver vous-même un coloriage qui marche, sans aide extérieure. Quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème? (qu'avez-vous fait pour répondre à la question a?)

c) Toujours dans le cas $k = 2$, combien d'instructions *au pire*[1] seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas), en fonction du nombre de sommets n? (donner la réponse en utilisant la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

d) Considérons maintenant le cas plus général $k \geq 2$ et supposons qu'on vous *donne* un coloriage avec k couleurs pour un graphe donné et qu'on vous demande de *vérifier* si ce coloriage fonctionne. En fonction du nombre de sommets n, combien d'instructions seront-elles nécessaire pour vérifier que le coloriage fonctionne, dans le pire des cas? (utiliser à nouveau la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

e*) Dans le cas particulier $k = 3$, quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème, si on vous laisse la trouver par vous-même? (à nouveau, essayez d'abord sur les exemples de graphes ci-dessus) Et combien d'instructions seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas)?

Attention: Cette dernière question est (beaucoup) plus difficile qu'il n'y paraît: en fait, même les plus grands scientifiques de la planète n'ont encore trouvé la réponse: ne désespérez donc pas si vous n'y arrivez pas du premier coup!

Note historique: C'est grâce à l'informatique qu'on a pu démontrer *mathématiquement* que 4 couleurs suffisent pour colorier tous les graphes dits *planaires*, c'est-à-dire les graphes correspondant à nos bonnes vieilles cartes de géographie (où on identifie les pays avec les sommets du graphe et les frontières communes entre deux pays avec les arêtes du graphe).]

3 Pour le plaisir: Sudoku et Mastermind*

A quelle(s) classe(s) de complexité appartiennent les deux problèmes suivants?

a) Résoudre un Sudoku dans un tableau de taille $n \times n$, avec n “chiffres” différents dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacun des n sous-tableaux de taille $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ qui une fois assemblés consituent le tableau de taille $n \times n$ (on ne considère ici que des valeurs $n = m^2$ avec m un nombre entier).

b) Trouver la combinaison cachée de n couleurs ou lettres dans un jeu de Mastermind, étant donné les indications fournies par le joueur adverse. Voici un exemple ci-dessous avec $n = 3$:

S E U	**1 élément bien placé et 1 élément mal placé**
R U D	**2 éléments bien placés**
R S U	**2 éléments mal placés**

[1] Imaginez le graphe le plus complexe possible avec n sommets.