Série 8

1 Nombre de bits

a) En 2019, combien de bits sont nécessaires pour représenter les informations suivantes?

1. le nombre d'étudiants inscrits en matériaux et en génie civil en première année à l'EPFL
2. le nombre total d'étudiants inscrits à l'EPFL
3. le nombre de vues d'une vidéo sur Youtube
4. le nombre d'habitants sur la planète Terre

b) Seul un certain nombre des 250 étudiants inscrits à un cours se présentent à un examen. Combien de bits sont nécessaires pour enregistrer les informations suivantes?

1. le nombre d'étudiants présents lors de l'examen
2. la liste des étudiants présents à l'examen
   (en supposant qu'on dispose déjà de la liste complète des noms des étudiants)

2 Conversion de décimal en binaire

Ecrire un algorithme qui prenne en entrée une liste L de n chiffres représentant un nombre entier positif en écriture décimale (par exemple: $L = (1, 9, 8, 4)$, représentant 1984) et dont la sortie soit une autre liste M de m bits représentant le même nombre en binaire (dans l'exemple, on voudrait donc $M = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$).

3 Interlude musical

Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

Rappel de trigonométrie (utile pour l'exercice 4 ci-dessous)

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

4 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

a) Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t)$ un signal de bande passante $B = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
Quelle est la bande passante des signaux suivants?

1. $2X(t)$
2. $X(t-1)$
3. $X(3t)$
4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$
5. $X'(t)$ [i.e., la dérivée de la fonction $X(t)$]

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

b) Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes B_X et B_Y, respectivement. *Que pouvez-vous dire* sur la bande passante des signaux suivants?

1. $X(t) + Y(t)$
2. $X(t) \cdot Y(t)$

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

5 Pour le plaisir: 10 rats pour 1'000 bouteilles*

Vous organisez un mariage et avez commandé à cette occasion 1'000 bouteilles d'un excellent cru. Manque de chance, il semble qu'un petit malin a introduit dans une (et une seule) de ces bouteilles un poison incolore, insipide et inodore, dont les effets sont dévastateurs (vomissements, convulsions, ...), mais au bout d'environ 24h seulement (i.e., le moment exact où le poison fait effet peut fluctuer d'une ou deux heures). Pour trouver la bouteille empoisonnée, vous disposez de 10 rats testeurs. Votre problème: nous sommes vendredi à 10h du matin et le mariage a lieu demain samedi à 15h. Comment allez-vous procéder pour être en mesure de pouvoir servir les 999 bouteilles non-empoisonnées au mariage?

Indication: Pour commencer à réfléchir au problème, on peut penser à la situation où on a seulement 4 bouteilles à tester et 2 rats à disposition.

Note: La résolution de ce problème n'est pas seulement utile aux organisateurs de mariages! L'algorithme de Hamming, basé sur ce principe, permet de localiser des erreurs de transmission dans de très longs messages, en utilisant un petit nombre de bits de parité pour coder les messages envoyés.