Série 9

1 Filtrer avant d'échantillonner: en avant la musique!

Lorsqu'on joue une note de musique sur instrument (p.ex. la note "La" à 440 Hz), on joue tout sauf une sinusoïde pure! Le son produit est une somme de sinusoïdes :

$$X(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_1 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

où f_1 est appelée la *fréquence fondamentale* (440 Hz dans le cas du "La"), et $f_n = nf_1$ sont les fréquences des *harmoniques* qui composent la note[1]. Remarquez que les fréquences f_n des harmoniques sont toujours des *multiples* de la fréquence fondamentale f_1, tandis que les amplitudes $a_n > 0$ de ces mêmes harmoniques (généralement décroissantes avec n) varient d'un instrument à l'autre; elles déterminent ce qu'on appelle le *timbre* de l'instrument (i.e., l'allure du signal X).

a) Quelle est la bande passante du signal X?

Pour enregistrer cette note de musique, on échantillonne le signal X à une certaine fréquence f_e. Si toutefois on veut éviter l'effet stroboscopique lors de la reconstruction du signal, il est nécessaire de filtrer le signal avant de l'échantillonner.

b) Pour chacune des fréquences fondamentales f_1 et fréquences d'échantillonnage f_e ci-dessous, déterminer quelle(s) fréquence(s) de coupure f_c il est possible d'utiliser afin de préserver un nombre maximum d'harmoniques du signal tout en évitant l'effet strobosopique; déterminer également le nombre d'harmoniques préservées dans chaque cas.

1. $f_1 = 440$ Hz ("La") et $f_e = 44.1$ kHz
2. $f_1 = 495$ Hz ("Si") et $f_e = 44.1$ kHz
3. $f_1 = 330$ Hz ("Mi") et $f_e = 8'820$ Hz

c) Beaucoup de systèmes de téléphonie mobile filtrent les signaux transmis à 3.4 kHz (ce qui permet de transmettre à peu près correctement la voix humaine, tout en réduisant le nombre de données à transmettre, mais certainement pas la musique!): combien de bits au minimum sont nécessaires pour enregistrer correctement une conversation de 5 minutes avec un tel système (avec une représentation des nombres réels en virgule flottante sur 64 bits)?

Note. La téléphonie *large-bande* (avec une bande passante de 7 kHz, ou même de 22 kHz) est progressivement en train de remplacer ce "vieux" système.

Rappel de trigonométrie (utile pour l'exercice 2 ci-dessous)

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

[1]Pour les musicien(ne)s: si $f_1 = 440$Hz, alors $f_2 = 880$ Hz est le "La" une octave au-dessus, $f_3 = 1320$ Hz est le "Mi" encore une quinte au-dessus de cette octave, etc.

2 Accordage de guitare et phénomène dit de "battement"

Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un "battement"), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Pour simplifier, on fait l'approximation que les notes qui sortent d'une guitare sont des sinusoïdes pures. L'onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec f_1 et f_2 proches l'une de l'autre[2]. Quelle est la forme de l'onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$

a) lorsque f_1 et f_2 sont proches, mais pas égales?

b) lorsque $f_1 = f_2$?

Note. Vous pouvez vous aider de `https://www.wolframalpha.com/` pour répondre à cette question!

3 Calculs et comparaisons d'entropies

a) Calculez l'entropie de la séquence de 20 lettres (inclus les espaces et le point d'exclamation):

HASTA LA VISTA BABY!

en écrivant tout d'abord le résulat sous la forme:

$$H = a + b \log_2(3) + c \log_2(5)$$

où a, b, c sont des fractions (positives ou négatives). Estimez ensuite le reśultat en utilisant les approximations suivantes: $\log_2(3) \simeq 1.58$ et $\log_2(5) \simeq 2.32$.

b) Pour chaque paire de mots ci-dessous, estimer lequel des deux mots a la plus grande entropie, ou s'ils ont la même entropie. Pour cela, on peut bien sûr à chaque fois calculer les entropies des deux mots pour répondre, mais on peut aussi essayer de répondre sans faire de calculs, en raisonnant sur les probabilités d'apparition des lettres dans chaque mot (autre indice: à nombre égal de lettres, le mot qui donne le plus de possibilités de créer d'autres mots en réutilisant ses lettres est celui qui a la plus grande entropie).

1. EPFL et EEPPFFLL
2. MEDITERRANNEE et MEDETERRENNEE
3. AAAH et HAHA
4. ABB et ABBA
5. ACD et ACDC
6. ABR et ABRI
7. CALC et CALCUL

c) De manière plus générale, quelle est la réponse aux deux questions ci-dessous? (une justification formelle n'est pas nécessaire, car elle peut être difficile à obtenir!):

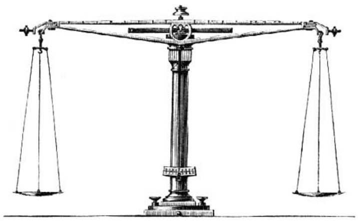
1. Considérons une séquence de lettres le longueur n finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui fait déjà partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $n+1$) diminue?

2. Considérons une séquence de lettres le longueur n finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui ne fait pas partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $n + 1$) augmente?

[2]En pratique, il se peut bien sûr qu'il y ait un déphasage entre les deux ondes, et aussi que les amplitudes ne soient pas rigoureusement les mêmes, mais là aussi, on simplifie.

4 Pour le plaisir: minimiser le nombre de pesées*

a) Vous avez devant vous 9 pièces de monnaie, identiques en apparence, mais quelqu'un vous dit que l'une d'elles est fausse et pèse un peu moins lourd que les autres. Pour identifier la fausse pièce, vous disposez d'une balance:



avec laquelle il est possible d'effectuer des pesées. Le résultat de chaque pesée peut être "la balance penche à gauche", "la balance penche à droite" ou "la balance reste stable".

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre *minimum* de pesées qu'il vous faut exécuter pour identifier la fausse pièce? Et quelles sont ces pesées?

Indication: Commencez par le problème plus simple où vous n'avez que 3 pièces devant vous.

b) Supposons maintenant que vous ayez 4 pièces devant vous, et que l'on vous indique qu'*au plus* une d'entre elles est fausse, *sans vous dire si celle-ci est plus légère ou au contraire plus lourde que les autres.* Pour vous aider, vous avez cette fois une pièce additionnelle dans votre poche que vous savez être vraie et que vous pouvez utiliser pour les pesées.

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre minimum de pesées qu'il vous faut exécuter (et à nouveau, quelles pesées effectuerez-vous?) pour être en mesure de répondre aux trois questions suivantes (prises ensemble): y a-t-il une fausse pièce? le cas échéant, quelle est-elle? et est-elle plus lourde ou plus légère que les autres?