Information, Calcul et Communication: Cours 13

Résumé de la dernière leçon: fonctionnement interne d'un ordinateur

- machine de Turing et architecture de von Neumann
- transistors et portes logiques, additionneur, mémoire
- une porte particulière : la porte XOR ($\oplus$):

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0 \qquad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$$

Plan de cette leçon: cryptographie et sécurité

- menaces et défenses
- cryptographie à clé secrète
- cryptographie à clé publique

Les menaces sur la sécurité informatique sont nombreuses !

Citons-en quelques-unes parmi les plus fréquentes:

- destruction de données
- vol de données
- usurpation d'identité
- manipulation de l'information
- ...

Heureusement, des remèdes existent!

- destruction de données $\longrightarrow$ disponibilité
- vol de données $\longrightarrow$ confidentialité
- usurpation d'identité $\longrightarrow$ authentification
- manipulation de l'information $\longrightarrow$ intégrité des données

Il y a toujours un compromis à faire entre:

coût du risque et prix des défenses

Cryptographie

La cryptographie, dont le but est de résoudre certains des problèmes évoqués ci-dessus, est divisée en deux grandes classes:

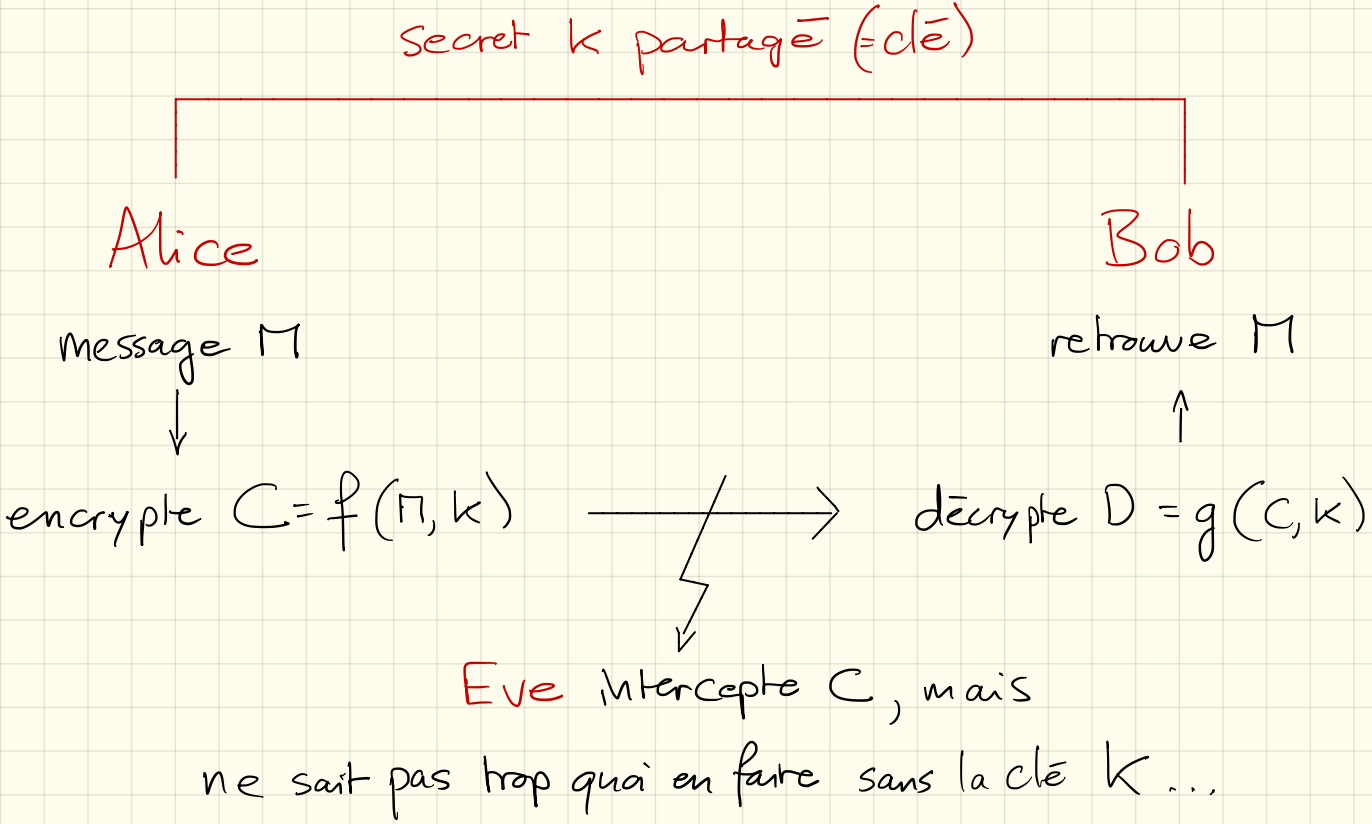
- La cryptographie à clé secrète (ou cryptographie "symétrique"):

  César, Vigenère, Enigma, one-time pad, DES, AES, ...

- La cryptographie à clé publique (ou cryptographie "asymétrique"):

  Diffie-Hellman, El Gamal, RSA, DSA, ...

Cryptographie à clé secrète : Scénario



Clé à usage unique ("one-time pad")

Voici une recette 100% sûre pour encrypter un message M composé de n bits : pour cela, il faut supposer que la clé secrète K est composée également de n bits et générée de la façon suivante : chacun des bits K_i est tiré uniformément au hasard (i.e., $Pr(K_i = 1) = Pr(K_i = 0) = \frac{1}{2}$) et tous les tirages sont effectués indépendamment, et aussi indépendamment du message M.

Alice envoie alors $C = M \oplus K$ (XOR bit par bit : pas de retenues ici)

Ex : Si $M = 01101101$ et $K = 11011100$,

alors $C = 10000001$

Pour décrypter le message, Bob effectue l'opération:

$$D = C \oplus K = (M \oplus K) \oplus K = M \oplus \underbrace{(K \oplus K)}_{= \text{séquence de } 0!} = M$$

Si Eve intercepte C, elle ne peut rien faire avec:

$$Pr(C_i = 0) = Pr(M_i \oplus K_i = 0) = P(K_i = M_i) = \frac{1}{2}$$

quelle que soit la valeur de M_i. De même,

$$Pr(C_i = 1) = \frac{1}{2}$$

Pour Eve, le message C est une séquence de bits tirés uniformément au hasard! Le système est sûr à 100%!

Défauts de ce système :

Pour envoyer un message de longueur n, il faut générer une clé de même longueur, qu'il faut trouver le moyen de partager secrètement avant de communiquer...

- Si la clé n'est pas générée parfaitement aléatoirement, alors le secret n'est plus assuré à 100% (imaginez p.ex. que $K = 00000000$, dans le pire des cas...).
- Gare à ne pas réutiliser la même clé K pour envoyer deux messages M_1 et M_2 à la suite avec ce système ! A partir de $C_1 = M_1 \oplus K$ et $C_2 = M_2 \oplus K$, Eve peut effectuer $C_1 \oplus C_2 = M_1 \oplus K \oplus M_2 \oplus K = M_1 \oplus M_2$: plus aucune garantie de sécurité !

Data Encryption Standard (DES) : (1976)

Un essai pour réutiliser la clé K !

Principe (et seulement le principe, pas tout le système)

On suppose que le message M et la clé K sont l'un et l'autre de longueur $2n$ bits et on décompose ceux-ci en :

$$M = (\underbrace{M_a}_{n \text{ bits}}, \underbrace{M_b}_{n \text{ bits}}) \quad , \quad K = (\underbrace{K_a}_{n \text{ bits}}, \underbrace{K_b}_{n \text{ bits}})$$

(NB : en pratique $n = 32$ bits)

Soit $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ une fonction non-linéaire.

$$K \;, \; M \longmapsto f(K, M)$$

Note : Si on utilisait $f(K,M) = K$, le système décrit à la page suivante ne serait rien d'autre que le one-time pad.

- Alice calcule successivement :

$$C_a = M_a \oplus f(K_a, M_b) \quad \text{puis} \quad C_b = M_b \oplus f(K_b, C_a)$$

et envoie $C = (C_a, C_b)$.

- Comment Bob peut-il décrypter ce message ?

Tout simplement, en fait ! Il refait les mêmes opérations dans l'ordre inverse :

$$D_b = C_b \oplus f(K_b, C_a) \quad \text{puis} \quad D_a = C_a \oplus f(K_a, D_b)$$

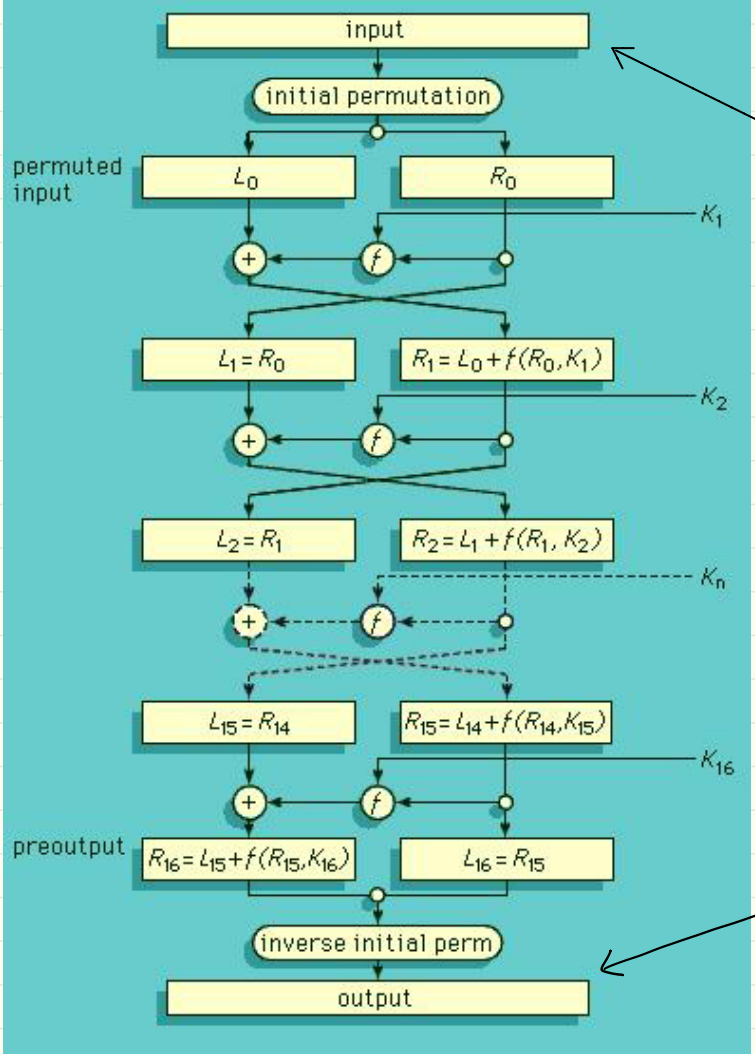
- Ainsi, Bob retrouve M, car :

$$\begin{cases} D_b = C_b \oplus f(K_b, C_a) = M_b \oplus \underbrace{f(K_b, C_a) \oplus f(K_b, C_a)}_{=0} = M_b \\ D_a = C_a \oplus f(K_a, \underbrace{D_b}_{=M_b}) = M_a \oplus \underbrace{f(K_a, M_b) \oplus f(K_a, M_b)}_{=0} = M_a \end{cases}$$

- Le système DES applique le principe ci-dessus 8 fois de suite (!) [voir illustration page suivante] pour encrypter un message, avec en plus une permutation du message à l'entrée et à la sortie.
- Ainsi, on peut encrypter plusieurs messages $M_1, M_2, \ldots$ avec la même clé K et espérer que même si Eve intercepte $C_1, C_2, \ldots$ elle ne sera pas capable de retrouver les messages $M_1, M_2 \ldots$ sans la clé K.
- Pourtant, ce système d'encrytage a été "cassé" pour la première fois en 1999 et remplacé depuis par le système AES (Advanced Encryption Standard).

Système DES Complet

L'encryptage et le décryptage s'effectuent avec les mêmes opérations !



message original M

message crypté C

Cryptographie à clé publique :

Protocole d'échange de clé de Diffie-Hellman

Alice et Bob désirent échanger des informations de manière confidentielle (et/ou envoyer des messages authentifiés) sans disposer d'une clé secrète k échangée à l'avance : (comment) est-ce possible ?

Réponse 1 : Ça n'est pas possible !

Réponse 2 : C'est possible en pratique grâce aux opérations difficilement inversibles ou "opérations à sens unique".

Exemple : Supposons qu'il soit facile de multiplier, mais difficile de diviser... (→ jeu)

Alice choisit un nombre N_1 ; Bob choisit N_2 ; et ils se mettent d'accord sur un 3e nombre M (public).

Alice calcule $N_3 = N_1 \cdot M$ de son côté et envoie N_3 à Bob.

Bob calcule $N_4 = N_2 \cdot M$ de son côté et envoie N_4 à Alice.

Alice calcule ensuite $N_1 \cdot N_4 = N_1 \cdot N_2 \cdot M$

et Bob calcule $N_2 \cdot N_3 = N_2 \cdot N_1 \cdot M$

↖ ↙ égaux = secret partagé

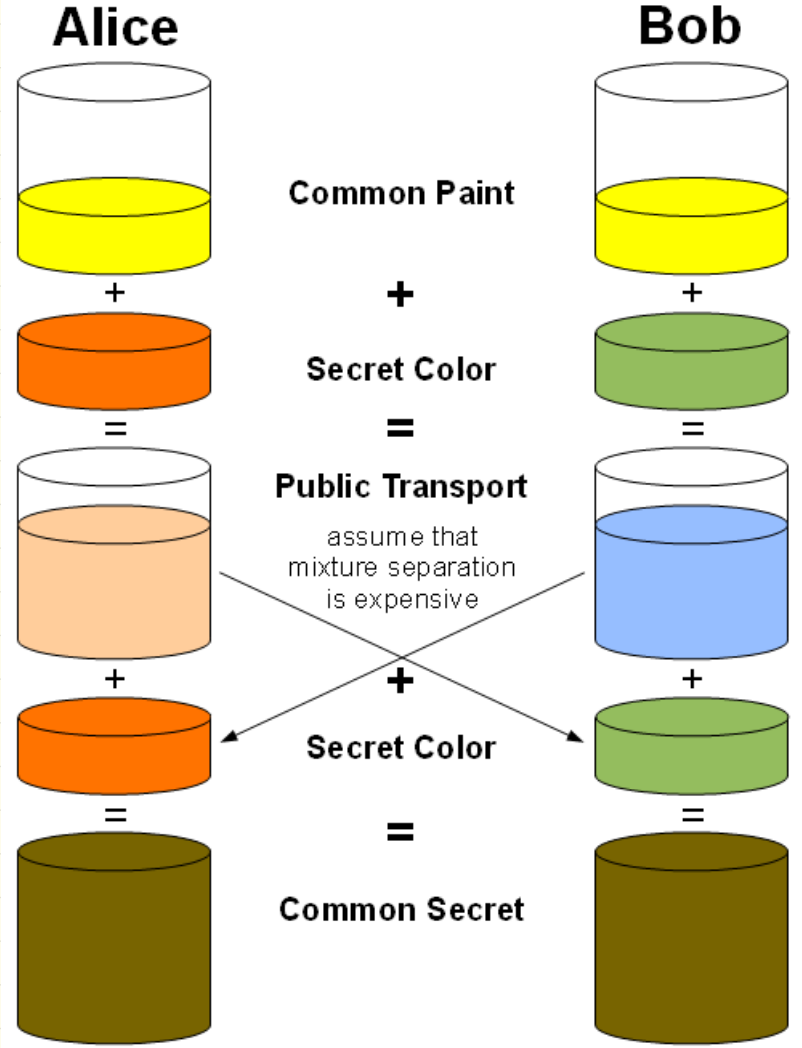
Alice et Bob sont ainsi tombés d'accord sur un même nombre.

Si Eve intercepte N_3 ou N_4 (ou même les deux nombres), et ne sait pas diviser, elle ne peut pas retrouver le secret.

La même chose avec des couleurs :

facilement mélangeables

mais difficilement séparables



Arithmétique modulaire

Bien sûr, diviser est une opération facile en vrai : Eve peut donc effectuer N_3 / M et retrouver N_1, de même que N_2 et le "secret" $N_1 \cdot N_2 \cdot M$. Il faut donc trouver autre chose !

Soit P un grand nombre premier. Sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, P-1\}$, on définit l'addition, la multiplication et l'exponentiation modulo P : (toutes des opérations faciles à exécuter)

$$N_1 + N_2 \pmod P \qquad N_1 \cdot N_2 \pmod P \qquad N_1^{N_2} \pmod P$$

Exemple : $4 + 3 \pmod 5 = 2$ $\quad 4 \cdot 3 \pmod 5 = 2$ $\quad 4^3 \pmod 5 = 4$
(avec $P = 5$)

Il se trouve que l'opération $N_1^{N_2} \pmod P = N_3$ est difficile à inverser (i.e., si on nous donne P, N_1 et N_3, il est difficile de retrouver N_2). Voilà donc l'opération à sens unique que nous allons utiliser.

Remarques :

- La difficulté de l'opération d'inversion dépend du nombre premier P choisi (c'est un long chapitre : celui du logarithme discret)
- Il existe par contre des algorithmes efficaces pour trouver des grands nombres premiers (→ exercice) et donc réaliser concrètement ce qui va suivre !

Utilisons cette opération à sens unique pour l'échange d'une clé secrète entre Alice et Bob :

- Alice et Bob choisissent d'abord ensemble un grand nombre premier P à n chiffres, ainsi qu'un autre nombre Q entre 1 et $P-1$. (P et Q sont donc publics)

- Alice choisit un nombre N_1 entre 1 et $P-1$ (secrètement)
  Bob choisit un nombre N_2 entre 1 et $P-1$ (secrètement)

- Alice effectue $N_3 = Q^{N_1} \pmod P$ et publie N_3
  Bob effectue $N_4 = Q^{N_2} \pmod P$ et publie N_4

- Alice effectue ensuite $N_4^{N_1} \pmod P = \left(Q^{N_2}\right)^{N_1} \pmod P$

$$= Q^{N_2 \cdot N_1} \pmod P = K$$

Bob effectue quant à lui $N_3^{N_2} \pmod P = \left(Q^{N_1}\right)^{N_2} \pmod P$

$$= Q^{N_1 \cdot N_2} \pmod P = K$$

- Alice et Bob ont ainsi trouvé une clé secrète commune K (= un grand nombre = une longue suite de bits). Notez également qu'Alice ne connaît toujours pas N_2, ni Bob ne connaît N_1.
- A partir de P, Q, N_3 et N_4, il est difficile pour Eve de retrouver N_1 ou N_2, car il faudrait inverser

$$N_3 = Q^{N_1} \pmod P \quad \text{ou} \quad N_4 = Q^{N_2} \pmod P$$

et donc Eve n'a pas non plus accès au secret K.

Ceci ne constitue qu'un léger aperçu de la multitude des méthodes qui existent pour protéger les échanges d'informations...

De manière plus générale, vous avez été exposés dans cette deuxième partie du cours ICC à un grand nombre de sujets qu'il vaudrait la peine de développer de manière plus approfondie... Ce que j'espère que vous aurez l'occasion de découvrir tout au long de vos études!