EPFL - Printemps 2018	M. Troyanov, M. Cossarini
Géométrie Riemannienne	**Exercices**
Série 2	25 février 2020

2.1. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\theta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme sur M. On note alors $\theta^\sharp \in \Gamma(M)$ le champ de vecteurs défini par

$$g(\theta^\sharp, X) = \theta(X), \quad \forall X \in \Gamma(M).$$

(a) Montrer que $\theta^\sharp$ est bien défini.

(b) Exprimer $\theta^\sharp$ en coordonnées locales pour la forme $\theta = a_i dx^i$ (relativement à la métrique $g_{ij} dx^i dx^j$).

(c) Le *gradient* d'une fonction $f \in C^1(M)$ est le champ de vecteurs $\text{grad}(f) = df^\sharp$. Donner une expression du gradient de f en coordoonées locales (relativement à la métrique $g_{ij} dx^i dx^j$).

(d) Calculer le gradient d'une fonction f sur $\mathbf{R}^2$ (avec la métrique euclidienne) en coordoonées cartésiennes (x, y), puis en coordoonées polaires.

2.2. Considérer $\mathcal{H}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = -1 \text{ et } x_0 > 0\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la métrique $h = -dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_n^2$ (remarquer que h est bien une métrique Riemannienne sur $\mathcal{H}^n$).
Ceci est appelé le modèle de l'hyperboloïde de l'espace hyperbolique. Dans cet exercice, nous allons trouver d'autres modèles de l'espace hyperbolique et exhiber les isométries entre ces modèles.
Tout au long des séries d'exercices, nous allons étudier cet espace, car il est un bel exemple de géométrie Riemannienne muni d'une très riche structure et un exemple de géométrie dans laquelle, par un point exterieur à une droite passe une infinité de parallèles.

(a) Considérer $\mathbb{D}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\right\}$. Prouver que la projection centrée sur le point $(1, 0, \ldots, 0)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{D}^n$ à $\mathcal{H}^n$, puis rappeler la métrique h sur $\mathbb{D}^n$ pour en faire un autre modèle de l'espace hyperbolique.

(b) Trouver une isométrie entre (D^n, h) et le demi-plan $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ muni de la métrique $\frac{1}{x_n^2} \sum_i \mathrm{d}x_i^2$.

2.3. Le *demi-plan de Poincaré* est le domaine $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique riemannienne

$$h = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

(a) Calculer l'aire de la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < a,\ b < y\}$ pour cette métrique.

(b) On identifie (x, y) à $z = x + iy$. Montrer que l'application (homographie) définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$ est une isométrie pour la métrique h.

(c) Trouver l'inverse de cette isométrie.

(d) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$ définie par

$$\varphi(z) = -\mathrm{i} \cdot \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

est un diffeomorphisme ($\mathbb{D}^2$ est le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$).

(e) Calculer l'application inverse $\varphi^{-1} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$.

(f) Calculer la métrique riemanienne $g = \varphi^*(h)$.

2.4. Une immersion de varietées riemanniennes $f : (M, g_0) \to (N, g_1)$ est conforme si la métrique rappel $h = f^* g_1$ est une déformation conforme de g_0, ça veut dire, il existe une fonction $\lambda : M \to (0, +\infty)$ tel que $h = \lambda^2 g_0$.

(a) Montrer que f est conforme si et seulement si elle préserve des angles: pour chaque $p \in M$ et pour toute paire de vecteurs $X, Y \in T_pM$, l'angle entre X et Y, $\frac{\langle X,Y \rangle}{|X||Y|}$ est égale à l'angle $\frac{\langle f_*X, f_*Y \rangle}{|f_*X||f_*Y|}$.

(b) Dans le cas où M et N sont sous-ensembles ouverts du plan complexe $\mathbb{C}$ avec la métrique euclidienne, montrer que f est conforme si et seulment si $z \mapsto f(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable ou $z \mapsto \overline{f(z)}$ est $\mathbb{C}$-dérivable.

2.5. En 1696 Johann Bernoulli pose le problème suivant. Soit un monde euclidien où les choses tombent avec acceleration $\mathbf{a}$, où $\mathbf{a} \neq 0$ est un vecteur vertical. Soit p un point et soit q un deuxième point moins haut que p. On à la possibilité de construire une glissière idéale de p à q, ça veut dire, une courbe γ de p à q le long de laquelle les particules glissent sans perte d'énergie. Bernoulli demande de trouver la courbe γ qui minimise le temps de voyage de p à q pour une particle qui part de p avec vitesse initiale nulle. La courbe souhaitée est appellée brachistochrone de p à q.

(a) Utiliser la conservation d'énergie (cinétique plus potentielle) pour exprimer la vitesse en fonction de l'hauteur pour les particules qui partent de p avec vitesse nulle.

(b) Trouver une métrique riemanniene g dont le differential de longueur est le differential de temps pour les particles qui partent de p avec vitesse nulle.

(c) Prouver que la distance riemannienne de p à q est égale au temps minimum de glissade de p à q.

(d) Quelle est l'effet dans la métrique des homothéties centrées en p?

(e) Essayer de trouver la brachistochrone de p a q. (C'est difficile maintenant parce que on n'a pas encore parlé de géodésiques.)